Пример решения задачи:
Сведение двойного интеграла к однократному

ЗАДАНИЕ.

Свести к однократному интегралу

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le x} x\, f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy$$

РЕШЕНИЕ.

Сделаем замену координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Якобиан такой замены $J = r$.

Уравнение $x^2 + y^2 = x$ примет вид:

$$r^2 = r\cos\varphi\,; \quad r = \cos\varphi$$

Область интегрирования:

$$\begin{cases} 0 \le r \le \cos\varphi \\ -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Интеграл примет вид:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le x} x\, f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{\cos\varphi} r\cos\varphi\, f(r)\cdot r dr$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{\cos\varphi} r^2 f(r)\cos\varphi\, dr$$

Изменим порядок интегрирования. Область интегрирования:

$$\begin{cases} -\arccos r \le \varphi \le \arccos r \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$$

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le x} x\, f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{\cos\varphi} r^2 f(r)\cos\varphi\, dr =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} dr \int\limits_{-\arccos r}^{\arccos r} r^2 f(r)\cos\varphi\, d\varphi = \int\limits_{0}^{1} r^2 f(r)\left(\sin\varphi \Big|_{-\arccos r}^{\arccos r}\right) dr =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} r^2 f(r)(\sin(\arccos r) - \sin(-\arccos r))dr = \int\limits_{0}^{1} r^2 f(r)\cdot 2\sin(\arccos r)\, dr$$

$$=$$

$$= \int_0^1 2r^2 f(r)\sqrt{1-r^2}dr$$

ОТВЕТ.

$$\int_0^1 2r^2 f(r)\sqrt{1-r^2}dr$$