Пример решения задачи: тройные интегралы для вычисления объема тела

ЗАДАНИЕ.

Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

$$z=\sqrt{100-x^2-y^2},\qquad z=6,\qquad x^2+y^2=51$$

(внутри цилиндра).

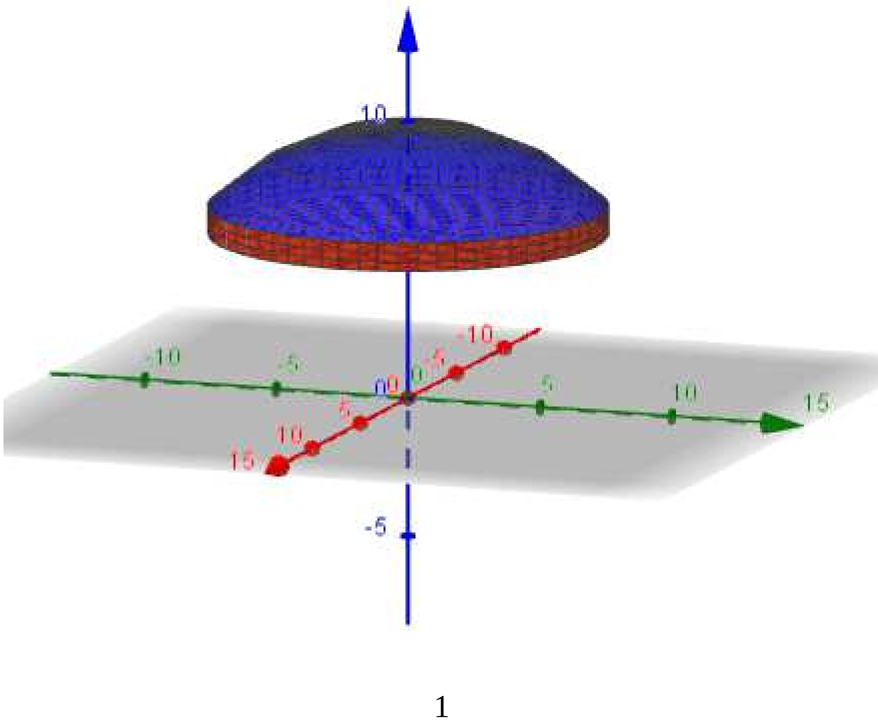
РЕШЕНИЕ.

Уравнение $z=\sqrt{100-x^2-y^2}$ описывает верхнюю ($z\geq 0$) половину сферы радиуса 10 с центром в начале координат. Уравнение $x^2+y^2=51$ описывает цилиндр с осью, совпадающей с осью Oz, радиуса $\sqrt{51}$.

Пересечение сферы и цилиндра - окружность

$$\begin{cases} x^2+y^2=51 \\ z=\sqrt{100-x^2-y^2}=\sqrt{100-51}=7 \end{cases}$$

Заданное тело ограничено цилиндрической поверхностью $x^2+y^2=51$,снизу - плоскостью $z=6$, сверху - частью сферы $x^2+y^2+z^2=100$:



$$V=\iiint\limits_V dxdydz$$

$$V:\ \begin{cases}6\le z\le\sqrt{100-x^2-y^2}\\ x^2+y^2\le 51\end{cases}$$

Перейдем к цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\ ;\quad dxdydz=rdrd\varphi dz\\ z=z\end{cases}$$

$$V:\ \begin{cases}6\le z\le\sqrt{100-r^2}\\ 0\le r\le\sqrt{51}\\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{cases}$$

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{51}}dr\int_6^{\sqrt{100-r^2}}rdz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{51}}\left(\sqrt{100-r^2}-6\right)rdr$$

$$\int_0^{\sqrt{51}}\left(\sqrt{100-r^2}-6\right)rdr=\int_0^{\sqrt{51}}\sqrt{100-r^2}\cdot rdr-3r^2\Big|_0^{\sqrt{51}}$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{51}}\sqrt{100-r^2}d(100-r^2)-$$

$$-3\cdot 51=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(100-r^2)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{51}}-153=-\frac{1}{3}\left(49^{3/2}-100^{3/2}\right)-153$$

$$=\frac{1}{3}(10^3-7^3)-153=66$$

$$V=\int_0^{2\pi}66d\varphi=132\pi$$

Ответ. 132π