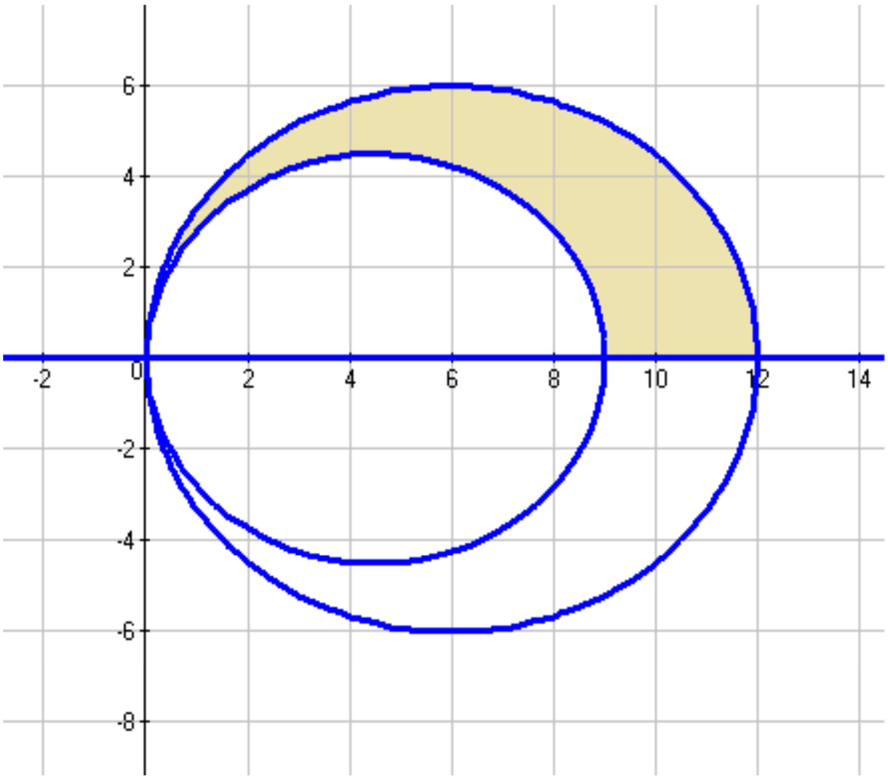
# Пример решения задачи: объем тела через тройной интеграл

ЗАДАНИЕ.

*Найти объем тела* $x^2+y^2=9x, x^2+y^2=12x, z=\sqrt{x^2+y^2}, z=0, y\ge 0$

РЕШЕНИЕ.

Сделаем чертеж проекции тела на плоскость OXY




Перейдем к цилиндрическим координатам $x=r\cos a, y=r\sin a, z=z$. Якобиан равен $r$

$$\left| \begin{array}{l} x^2-9x+y^2=0 \Rightarrow r^2-9r\cos a=0 \Rightarrow r=9\cos a\ge 0 \\ x^2-12x+y^2=0 \Rightarrow r^2-12r\cos a=0 \Rightarrow r=12\cos a\ge 0 \Rightarrow a\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right] \\ y\ge 0 \Rightarrow r\sin a\ge 0 \Rightarrow a\in[0;\pi] \end{array} \right.$$

$$z=\sqrt{x^2+y^2}=r$$

Тогда,

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}da\int_{9\cos a}^{12\cos a}dr\int_0^r rdz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}da\int_{9\cos a}^{12\cos a}r^2dr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{9\cos a}^{12\cos a}da=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{(12\cos a)^3-(9\cos a)^3}{3}\right]da=333\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 a da=$$

$$=333\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 a\cos a da=333\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 a\right)d\sin a=$$

$$=333\left[\sin a-\frac{1}{3}\sin^3 a\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=333\left[1-\frac{1}{3}\right]=222.$$

**Ответ:** 222.