Пример решения задачи: статический момент через тройной интеграл

Задание.

Найти статический момент относительно xOy однородного тела, ограниченного поверхностью

$$(x^2+y^2+z^2)^3=\frac{x^2+y^2}{z^2}$$

с плотностью $z=0$ $(z\geq 0)$.

Решение.

Статический момент относительно xOy тела плотности $\mu(x,y,z)$ находится по формуле:

$$S_{xy}=\iiint\limits_V z\cdot\mu(x,y,z)dv$$

Учитывая, что тело однородное, $\mu(x,y,z)=1$.

Перейдем к сферическим координатам:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi\sin\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta \\ z=r\cos\theta \end{cases};\ dxdydz=r^2\sin\theta\, drd\varphi d\theta$$

Уравнение поверхности примет вид

$$(r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta+r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta)^3 =\frac{r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta+r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta}$$

$$(r^2\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta)^3=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$(r^2)^3=\operatorname{tg}^2\theta$$

$$r^6=\operatorname{tg}^2\theta$$

$$r=\sqrt[3]{\operatorname{tg}\theta}$$

Тогда заданное тело

$$V:\ \begin{cases} 0\leq r\leq\sqrt[3]{\operatorname{tg}\theta} \\ 0\leq\varphi\leq 2\pi \\ 0\leq\theta\leq\pi/2 \end{cases}$$

Искомый статический момент:

$$S_{xy}=\iiint\limits_V z\cdot 1dv=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}d\theta\int\limits_0^{\sqrt[3]{\operatorname{tg}\theta}}r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta\,dr$$

$$\int\limits_0^{\sqrt[3]{\operatorname{tg}\theta}}r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta\,dr=\int\limits_0^{\sqrt[3]{\operatorname{tg}\theta}}r^3\sin\theta\cos\theta\,dr=\frac{1}{4}\sin\theta\cos\theta\ r^4\Big|_0^{\sqrt[3]{\operatorname{tg}\theta}}$$

$$=\frac{1}{4}\sin\theta\cos\theta\sqrt[3]{\frac{\sin^4\theta}{\cos^4\theta}}=$$

$$=\frac{1}{4}\sin\theta\sqrt[3]{\frac{\sin^4\theta}{\cos\theta}}=\frac{1}{4}\sin\theta\sqrt[3]{\frac{(1-\cos^2\theta)^2}{\cos\theta}}$$

$$\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{4}\sin\theta\sqrt[3]{\frac{(1-\cos^2\theta)^2}{\cos\theta}}d\theta=\left|\begin{matrix}\cos\theta=t\\ dt=-\sin\theta\,d\theta\end{matrix}\right|=-\int\limits_1^0\frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{(1-t^2)^2}{t}}$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{3}}(1-t^2)^{\frac{2}{3}}dt=$$

$$=\left|\begin{matrix}z^3=\frac{1}{t^2}-1;\ \ t^2=\frac{1}{z^3+1} & t=1;\ \ z=0\\ t=\frac{1}{\sqrt{z^3+1}};\ \ dt=-\frac{3}{2}\frac{z^2}{\sqrt{(z^3+1)^3}}dz & t=0;\ \ z\to+\infty\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_\infty^0\left(\frac{1}{\sqrt{z^3+1}}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(1-\frac{1}{z^3+1}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{z^2}{\sqrt{(z^3+1)^3}}dz=$$

$$=-\frac{3}{8}\int\limits_\infty^0(z^3+1)^{\frac{1}{6}}\left(\frac{z^3}{z^3+1}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{z^2}{(z^3+1)^{3/2}}dz$$

$$=-\frac{3}{8}\int\limits_\infty^0(z^3+1)^{\frac{1}{6}}\cdot\frac{z^2}{(z^3+1)^{2/3}}\cdot\frac{z^2}{(z^3+1)^{3/2}}dz=$$

$$=\frac{3}{8}\int\limits_0^\infty\frac{z^4(z^3+1)^{\frac{1}{6}}}{(z^3+1)^{\frac{13}{6}}}dz=\frac{3}{8}\int\limits_0^\infty\frac{z^4}{(z^3+1)^2}dz$$

$$\int \frac{z^4}{(z^3+1)^2}dz = \left| \begin{matrix} u = z^2 & dv = \dfrac{z^2}{(z^3+1)^2}dz \\ du = 2zdz & v = -\dfrac{1}{3(z^3+1)} \end{matrix} \right|$$

$$= -\frac{z^2}{3(z^3+1)} + \int \frac{2z}{3(z^3+1)}dz =$$

$$= -\frac{z^2}{3(z^3+1)} + \frac{2}{9}\int \left(\frac{z+1}{z^2-z+1} - \frac{1}{z+1}\right)dz$$

$$= -\frac{z^2}{3(z^3+1)} + \frac{2}{9}\int \left(\frac{z-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{z^2-z+1}\right)dz - \frac{2}{9}\ln(z+1) =$$

$$= -\frac{z^2}{3(z^3+1)} + \frac{1}{9}\int \frac{2z-1}{z^2-z+1}dz + \frac{2}{9}\cdot\frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dz - \frac{2}{9}\ln(z+1) =$$

$$= -\frac{z^2}{3(z^3+1)} - \frac{2}{9}\ln(z+1) + \frac{1}{9}\ln(z^2-z+1) + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(z-\frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= -\frac{z^2}{3(z^3+1)} + \frac{1}{9}\ln\left(\frac{z^2-z+1}{z^2+2z+1}\right) + \frac{2\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\int_0^\infty \frac{z^4}{(z^3+1)^2}dz$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{z^2}{3(z^3+1)} + \frac{1}{9}\ln\left(\frac{z^2-z+1}{z^2+2z+1}\right)\right.$$

$$\left.+ \frac{2\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^b\right) =$$

$$= 0 + \frac{1}{9}\ln 1 + \frac{2\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{\pi}{2} - \left(0 + \frac{1}{9}\ln 1 - \frac{2\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{2\pi}{3}$$

$$S_{xy} = \iiint_V z\cdot 1dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\sqrt[3]{\operatorname{tg}\theta}} r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta\, dr = \int_0^{2\pi} \frac{3}{8}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{2\pi}{3}d\varphi$$
$$=$$

$$= \frac{3}{8}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{2\pi}{3}\cdot 2\pi = \frac{\pi^2\sqrt{3}}{9}$$

Ответ. $\frac{\pi^2\sqrt{3}}{9}$