

### Задача с решением по численным методам

#### Тема: приближенное вычисление интеграла с помощью формулы Гаусса

ЗАДАНИЕ.

1) Вычислить приближенное значение интеграла, используя квадратурную формулу Гаусса с 11 узлами

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

где  $n = 11$

Узлы	Коэффициенты
$\pm 0,2695431559$	$0,2628045445$
$\pm 0,5190961292$	$0,2331937645$
$\pm 0,7301520055$	$0,1862902109$
$\pm 0,8870625997$	$0,1255803694$
$\pm 0,9782286581$	$0,0556685671$
$0,0$	$0,2729250867$

Для вычисления интеграла следует сделать замену переменных

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$$

2) Определите оценку погрешности через производную "2n".

3) Определите абсолютную погрешность приближенного значения интеграла.

$$\int_{1.6}^{2.4} (x+1) \sin x dx$$

РЕШЕНИЕ.

1) Приближенное вычисление интеграла.

Сделаем замену.

$$x = 0.4t + 2; \quad dx = 0.4dt; \quad t = \frac{x-2}{0.4};$$

$$x = 1.6 \rightarrow t = -1; \quad x = 2.4 \rightarrow t = 1$$

$$\int_{1.6}^{2.4} (x+1) \sin x dx = \int_{-1}^1 0.4(0.4t+3) \sin(0.4t+2) dt$$

$k$	$t_k$	$A_k$	$f(t_k)$	$A_k f(t_k)$
0	0,9782286581	0,0556685671	1,0427335866	0,0580474846
1	0,8870625997	0,1255803694	1,0551446157	0,1325054506
2	0,7301520055	0,1862902109	1,0730053600	0,1998903948
3	0,5190961292	0,2331937645	1,0896405466	0,2540973810
4	0,2695431559	0,2628045445	1,0976393271	0,2884646034

	0,2695431559			
5	0,0000000000	0,2729250867	1,0911569122	0,2978040949
6	0,2695431559	0,2628045445	1,0681400324	0,2807120547
7	0,5190961292	0,2331937645	1,0315478165	0,2405505186
8	0,7301520055	0,1862902109	0,9888973414	0,1842218943
9	0,8870625997	0,1255803694	0,9501863787	0,1193247564
10	0,9782286581	0,0556685671	0,9249531871	0,0514908186
			Сумма	2,1071094519

$$\int_{1.6}^{2.4} (x + 1) \sin x \, dx \approx 2.1071094519$$

2) Оценка погрешности.

$$R_n(f) = \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)(2n)!} \cdot \left( \frac{(n!)^2}{(2n)!} \right)^2 f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in [-1; 1]$$

Для  $n = 11$ :

$$R = \frac{2^{23}}{23 \cdot 22!} \cdot \left( \frac{(11!)^2}{22!} \right)^2 \cdot f^{(22)}(\xi), \quad \xi \in [-1; 1]$$

$$|f^{(22)}(\xi)| < 1, \quad \xi \in [-1; 1]$$

$$|R| < 6.52 \cdot 10^{-28}$$

3) Определим абсолютную погрешность приближенного значения интеграла.

$$\Delta = \left| \int_{1.6}^{2.4} (x + 1) \sin x \, dx - 2.1071094519 \right| \approx 4.7 \cdot 10^{-10}$$

Ответ.  $I \approx 2.1071094519$