Тема. Дифференциальные уравнения. Задача Коши

ЗАДАНИЕ. *Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения*

$$y'=\frac{2y-x}{2x+y},\ y(1)=1$$

РЕШЕНИЕ. Умножим числитель и знаменатель дроби на $\frac{1}{x}$:

$$y'=\frac{\frac{1}{x}(2y-x)}{\frac{1}{x}(2x+y)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\frac{y}{x}-1}{2+\frac{y}{x}}$$

Мы получили однородное дифференциальное уравнение первого порядка, то есть, уравнение вида $y'=f(\frac{x}{y})$. Для его решения введем новую переменную $y=tx$. Тогда

$$y'=(tx)'=t'x+x't=t'x+t$$

Подставим эти значения в наше уравнение:

$$\frac{dt}{dx}x+t=\frac{2t-1}{2+t}$$

$$\frac{dt}{dx}x=\frac{2t-1}{2+t}-\frac{2t+t^2}{2+t}$$

$$\frac{dt}{dx}x=\frac{2t-1-2t-t^2}{2+t}$$

$$\frac{dt}{dx}x=-\frac{t^2+1}{2+t}$$

$$dt=-\frac{t^2+1}{2+t}\frac{dx}{x}$$

$$\frac{(2+t)dt}{t^2+1}=-\frac{dx}{x}$$

Мы успешно разделили переменные. Теперь можно проинтегрировать обе части.

$$\int\frac{(2+t)dt}{t^2+1}=-\int\frac{dx}{x}$$

Найдем первый интеграл $\int \frac{(2+t)dt}{t^2+1}$ отдельно. Его можно разбить на два интеграла:

$$\int \frac{(2+t)dt}{t^2+1} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} + \int \frac{tdt}{t^2+1} = 2arctg(t) + \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} = 2arctg(t) + \frac{1}{2}\ln(t^2+1) - C$$

То есть, мы получаем, что

$$2arctg(t) + \frac{1}{2}\ln(t^2+1) - C = -\ln x$$

$$-\ln x + C = 2arctg(t) + \frac{1}{2}\ln(t^2+1)$$

Вернемся к переменной y по формуле $t = \frac{y}{x}$. Получим:

$$C - \ln x = 2arctg(\frac{y}{x}) + \frac{1}{2}\ln(\frac{y^2}{x^2}+1)$$

Определим константу C, исходя из начального условия $y(1)=1$. Подставим эти данные в решение:

$$C - \ln 1 = 2arctg(\frac{1}{1}) + \frac{1}{2}\ln(\frac{1}{1}+1)$$

$$C = 2arctg1 + \frac{1}{2}\ln 2$$

$$C = \frac{\pi}{2} + \frac{\ln 2}{2} = \frac{\pi + \ln 2}{2}$$

Таким образом, решение задачи Коши имеет вид:

$$\frac{\pi + \ln 2}{2} - \ln x = 2arctg(\frac{y}{x}) + \frac{1}{2}\ln(\frac{y^2}{x^2}+1)$$

$$4arctg(\frac{y}{x}) + \ln(\frac{y^2}{x^2}+1) + 2\ln x = \pi + \ln 2$$