Тема. Дифференциальные уравнения. Задача Коши

ЗАДАНИЕ. *Решить задачуКоши для дифференциального уравнения*

$y''' = x + \cos x; y(0) = 0; y'(0) = 0; y''(0) = 0$

РЕШЕНИЕ.

У нас уравнение, разрешенное относительно производной, вида $y''' = f(x)$. Проинтегрируем его три раза и найдем решение:

$$y''' = x + \cos x$$

$$y'' = \int (x + \cos x)dx = \frac{1}{2}x^2 + \sin x + C_1$$

$$y' = \int (\frac{1}{2}x^2 + \sin x + C_1)dx = \frac{1}{6}x^3 - \cos x + C_1 x + C_2$$

$$y = \int (\frac{1}{6}x^3 - \cos x + C_1 x + C_2)dx = \frac{1}{24}x^4 - \sin x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3$$

Из уравнения для второй производной найдем C_1:

$$y'' = \frac{1}{2}x^2 + \sin x + C_1$$

$$0 = \frac{1}{2}\cdot 0^2 + \sin 0 + C_1$$

$$C_1 = 0$$

Тогда получаем:

$$y'' = \frac{1}{2}x^2 + \sin x$$

$$y' = \frac{1}{6}x^3 - \cos x + C_2$$

$$y = \frac{1}{24}x^4 - \sin x + C_2 x + C_3$$

Из выражения для первой производной найдем C_2:

$$y' = \frac{1}{6}x^3 - \cos x + C_2$$

$$0 = \frac{1}{6}\cdot 0^3 - \cos 0 + C_2$$

$$0 = -1 + C_2$$

$$C_2 = 1$$

Тогда получаем:

$$y'' = \frac{1}{2}x^2 + \sin x$$

$$y' = \frac{1}{6}x^3 - \cos x + 1$$

$$y = \frac{1}{24}x^4 - \sin x + x + C_3$$

Из выражения для функции найдем C_3:

$$y = \frac{1}{24}x^4 - \sin x + x + C_3$$

$$0 = \frac{1}{24} \cdot 0^4 - \sin 0 + 0 + C_3$$

$$C_3 = 0$$

Следовательно, решением нашей задачи Коши будет функция:

$$y = \frac{1}{24}x^4 - \sin x + x$$