Задача. *Представить интегралом Фурье функцию*

$$f(x)=\begin{cases}|x|, & |x|\le e;\\ 0, & \textit{иначе}.\end{cases}$$

Решение. Для функции $f(x)$ (кусочно-непрерывной и абсолютно интегрируемой на $(-\infty;+\infty)$, что выполняется для данной функции) интеграл Фурье (в комплексной форме) выражается следующим образом:

$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}c(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda$, где коэффициент

$$c(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\lambda t}dt.$$

Вычисляем:

$$c(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\lambda t}dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|t|e^{i\lambda t}dt=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-e}^{0}te^{i\lambda t}dt+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{e}te^{i\lambda t}dt=$$

Вычислим отдельно интеграл:

$$\int te^{i\lambda t}dt=\left|\begin{matrix}u=t & du=dt\\ dv=e^{i\lambda t}dt & v=\dfrac{1}{i\lambda}e^{i\lambda t}\end{matrix}\right|=\frac{1}{i\lambda}te^{i\lambda t}-\frac{1}{i\lambda}\int e^{i\lambda t}dt=\frac{1}{i\lambda}te^{i\lambda t}-\frac{1}{(i\lambda)^2}e^{i\lambda t}=$$

$$=\frac{1}{i\lambda}te^{i\lambda t}+\frac{1}{\lambda^2}e^{i\lambda t}=\left(\frac{1}{i\lambda}t+\frac{1}{\lambda^2}\right)e^{i\lambda t}.$$

Подставляем:

$$=-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{i\lambda}t+\frac{1}{\lambda^2}\right)e^{i\lambda t}\Bigg|_{-e}^{0}+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{i\lambda}t+\frac{1}{\lambda^2}\right)e^{i\lambda t}\Bigg|_{0}^{e}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\left(0+\frac{1}{\lambda^2}\right)e^{0}+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{i\lambda}(-e)+\frac{1}{\lambda^2}\right)e^{-ei\lambda}+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{i\lambda}e+\frac{1}{\lambda^2}\right)e^{i\lambda e}-\frac{1}{2\pi}\left(0+\frac{1}{\lambda^2}\right)e^{0}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi\lambda^2}+\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{e}{i\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\right)e^{-ei\lambda}+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{i\lambda}e+\frac{1}{\lambda^2}\right)e^{i\lambda e}-\frac{1}{2\pi\lambda^2}=$$

$$=-\frac{1}{\pi\lambda^2}+\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{e}{i\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\right)e^{-ei\lambda}+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{i\lambda}e+\frac{1}{\lambda^2}\right)e^{i\lambda e}.$$

Получили $c(\lambda)=-\dfrac{1}{\pi\lambda^2}+\dfrac{1}{2\pi}\left(-\dfrac{e}{i\lambda}+\dfrac{1}{\lambda^2}\right)e^{-ei\lambda}+\dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{1}{i\lambda}e+\dfrac{1}{\lambda^2}\right)e^{i\lambda e}$.

Интеграл Фурье:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}c(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[-\frac{1}{\pi\lambda^2}+\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{e}{i\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\right)e^{-ei\lambda}+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{i\lambda}e+\frac{1}{\lambda^2}\right)e^{i\lambda e}\right]e^{-i\lambda x}d\lambda$$

В вещественной форме:

$$c(\lambda)=-\frac{1}{\pi\lambda^2}+\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{e}{i\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\right)e^{-ei\lambda}+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{i\lambda}e+\frac{1}{\lambda^2}\right)e^{i\lambda e}=$$

$$=-\frac{1}{\pi\lambda^2}+\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{e}{i\lambda}e^{-ei\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}e^{-ei\lambda}+\frac{1}{i\lambda}ee^{i\lambda e}+\frac{1}{\lambda^2}e^{i\lambda e}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\pi\lambda^2}+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{e}{i\lambda}\left(e^{i\lambda e}-e^{-ei\lambda}\right)+\frac{1}{\lambda^2}\left(e^{-ei\lambda}+e^{i\lambda e}\right)\right)=$$

$$=-\frac{1}{\pi\lambda^2}+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{e}{i\lambda}2i\sin(\lambda e)+\frac{1}{\lambda^2}2\cos(\lambda e)\right)=$$

$$=-\frac{1}{\pi\lambda^2}+\frac{e}{\pi\lambda}\sin(\lambda e)+\frac{1}{\pi\lambda^2}\cos(\lambda e).$$

Интеграл Фурье:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}c(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}\left[-\frac{1}{\pi\lambda^2}+\frac{e}{\pi\lambda}\sin(\lambda e)+\frac{1}{\pi\lambda^2}\cos(\lambda e)\right]e^{-i\lambda x}d\lambda=$$

$$=\int_{0}^{\infty}2\left[-\frac{1}{\pi\lambda^2}+\frac{e}{\pi\lambda}\sin(\lambda e)+\frac{1}{\pi\lambda^2}\cos(\lambda e)\right]\cos(\lambda x)\,d\lambda.$$