

Решение задач выполнено на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=mafa

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

Функциональный анализ

Задание. Применяя метод дифференцирования по параметру, вычислить интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x} e^{-bx} dx, \quad b > 0 \quad (\downarrow b > 1).$$

Решение:

$x = 0$ является особой точкой. Доопределим подынтегральную функцию в особой точке:

$$f(x, \alpha) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \alpha x}{x} e^{-bx}, & x > 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Функция $f(x, \alpha)$ является непрерывной на $[0; \infty) \times [0; \infty)$, поэтому

$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x} e^{-bx} dx$ является непрерывной функцией.

Далее, функция

$$f'_\alpha(x, \alpha) = \left(\frac{1 - \cos \alpha x}{x} \right)' e^{-bx} = \left(\frac{x \sin \alpha x}{x} \right) e^{-bx} = \sin \alpha x e^{-bx}.$$

Функция $f'_\alpha(x, \alpha) = \sin \alpha x e^{-bx}$ непрерывна, значит, можно дифференцировать под знаком интеграла:

Решение задач выполнено на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=mafa

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \sin \alpha x e^{-bx} dx.$$

Поскольку, по условию, $b > 0$, то имеет место формула:

$$\int_b^{\infty} e^{-nx} \sin \alpha x dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + n^2}$$

Имеем:

$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \sin \alpha x e^{-bx} dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + b^2}.$$

Тогда

$$I(\alpha) = \int \frac{\alpha}{\alpha^2 + b^2} d\alpha = \int \frac{1}{\alpha^2 + b^2} \frac{d\alpha^2}{2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(\alpha^2 + b^2)}{\alpha^2 + b^2} = \frac{1}{2} \ln|\alpha^2 + b^2| + C, C - const.$$

Но левая и правая части непрерывны при любом α , значит, формула верна и при $\alpha = 0$. Учитывая, что $I(0) = 0$, получим $C = -0,5 \ln b^2$. Таким образом,

$$I(\alpha) = \frac{1}{2} \ln|\alpha^2 + b^2| - \frac{1}{2} \ln|b^2| = \frac{1}{2} \frac{\ln|\alpha^2 + b^2|}{\ln|b^2|}, b \neq 1.$$

Ответ: $\frac{\ln|\alpha^2 + b^2|}{2 \ln|b^2|}, b \neq 1.$