Функциональный анализ

Задание. *Применяя метод дифференцирования по параметру, вычислить интеграл*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos\alpha x}{x} e^{-bx} dx,\ \ b>0\ \ (\downarrow b>1).$$

Решение:

x = 0 является особой точкой. Доопределим подынтегральную функцию в особой точке:

$$f(x,\alpha)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\alpha x}{x}e^{-bx}, x>0;\\ 0, x=0.\end{cases}$$

Функция $f(x,\alpha)$ является непрерывной на $[0;\infty)\times[0;\infty)$, поэтому $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\alpha x}{x}e^{-bx}dx$ является непрерывной функцией.

Далее, функция

$$f'_\alpha(x,\alpha)=\left(\frac{1-\cos\alpha x}{x}\right)' e^{-bx} = \left(\frac{x\sin\alpha x}{x}\right)e^{-bx} = \sin\alpha x e^{-bx}.$$

Функция $f'_\alpha(x,\alpha)=\sin\alpha x e^{-bx}$ непрерывна, значит, можно дифференцировать под знаком интеграла:

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\sin\alpha x e^{-bx}dx\,.$$

Поскольку, по условию, $b>0$, то имеет место формула:

$$\int_b^{\infty}e^{-nx}\sin\alpha x dx=\frac{\alpha}{\alpha^2+n^2}$$

Имеем:

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\sin\alpha x e^{-bx}dx=\frac{\alpha}{\alpha^2+b^2}\,.$$

Тогда

$$I(\alpha)=\int\frac{\alpha}{\alpha^2+b^2}d\alpha=\int\frac{1}{\alpha^2+b^2}\frac{d\alpha^2}{2}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(\alpha^2+b^2\right)}{\alpha^2+b^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\alpha^2+b^2\right|+C, C-const\,.$$

Но левая и правая части непрерывны при любом α, значит, формула верна и при $\alpha=0$. Учитывая, что $I(0)=0$, получим $C=-0{,}5\ln b^2$. Таким образом,

$$I(\alpha)=\frac{1}{2}\ln\left|\alpha^2+b^2\right|-\frac{1}{2}\ln\left|b^2\right|=\frac{1}{2}\frac{\ln\left|\alpha^2+b^2\right|}{\ln\left|b^2\right|}, b\neq 1.$$

Ответ: $\dfrac{\ln\left|\alpha^2+b^2\right|}{2\ln\left|b^2\right|}, b\neq 1.$