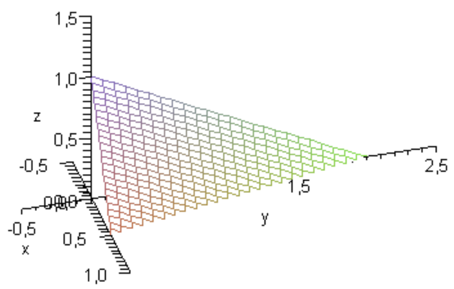
Теория поля
Поток векторного поля

ЗАДАНИЕ.

Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через часть плоскости P, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).

$$\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k}, \qquad P: \quad 2x + \frac{y}{2} + z = 1.$$

РЕШЕНИЕ. Изобразим искомую плоскость на рисунке:



Поток векторного поля $\vec{a}$ через поверхность G – поверхностный интеграл по G:

$$\Pi = \iint_G (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS,$$

где $(\_ \cdot \_)$ − скалярное произведение, $\vec{n}$ − единичный вектор внешней нормали, dS − элемент площади.

Для плоскости $2x + \frac{y}{2} + z = 1$ нормальным вектором будет $\vec{N} = \left(2, \frac{1}{2}, 1\right)$.

Нормируя, получим искомый единичный вектор нормали:

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|} = \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{4} + 1}} \left(2, \frac{1}{2}, 1\right) = \frac{2}{\sqrt{21}} \left(2, \frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}\right).$$

Вычислим скалярное произведение:

$$(\vec{a}\cdot\vec{n})=2x\cdot\frac{4}{\sqrt{21}}+y\cdot\frac{1}{\sqrt{21}}-2z\cdot\frac{2}{\sqrt{21}}=\frac{8x+y-4z}{\sqrt{21}}.$$

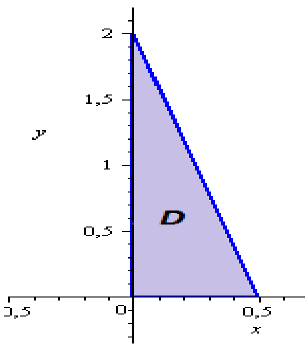
Спроецируем заданную плоскость, уравнение которой выразим явно $z=z(x,y)$, на плоскость xOy и представим искомый поверхностный интеграл в виде двойного:

$$\Pi=\iint_G(\vec{a}\cdot\vec{n})dS=\iint_D(\vec{a}\cdot\vec{n})\sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}\,dxdy,$$

где D − проекция плоскости на xOy. Ее можно получить, положив $z=0$:

$$\begin{cases}2x+\frac{1}{2}y=1\\ x\ge 0, y\ge 0\end{cases}.$$

Изобразим на рисунке проекцию D:



Выразим из уравнение плоскости z явно через x и y:

$$2x+\frac{y}{2}+z=1 \quad\Leftrightarrow\quad z=z(x,y)=1-2x-\frac{y}{2}.$$

Тогда

$$(\vec{a}\cdot\vec{n})=\frac{8x+y-4z}{\sqrt{21}}=\frac{8x+y-4\left(1-2x-\frac{y}{2}\right)}{\sqrt{21}}=\frac{16x+3y-4}{\sqrt{21}}.$$

Вычислим частные производные функции $z=z(x,y)$:

$$z'_x=-2, \qquad z'_y=-\frac{1}{2}.$$

Подставим в формулу полученные результаты:

$$\Pi=\iint_D(\vec{a}\cdot\vec{n})\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy=\iint_D\frac{16x+3y-4}{\sqrt{21}}\sqrt{1+4+\frac{1}{4}}dxdy=$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D(16x+3y-4)dxdy.$$

Представим полученный двойной интеграл в виде повторного с внешним интегрированием по x и внутренним – по y. Проекцией области D является отрезок $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, а вдоль оси ординат область заключена между $y=0$ и

$2x+\frac{y}{2}=1 \quad\Leftrightarrow\quad y=2-4x$, Значит,

$$\Pi=\frac{1}{2}\iint_D(16x+3y-4)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_0^{2-4x}(16x+3y-4)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(16xy\Big|_0^{2-4x}+\frac{3}{2}y^2\Big|_0^{2-4x}-4y\Big|_0^{2-4x}\right)dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[2(16x-4)(2-4x)+3(2-4x)^2\right]dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-128x^2+96x-16+12-48x+48x^2\right)dx=-20\int_0^{\frac{1}{2}}x^2dx+12\int_0^{\frac{1}{2}}xdx-\int_0^{\frac{1}{2}}dx=$$

$$=-20\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{0.5}+6x^2\Big|_0^{0.5}-x\Big|_0^{0.5}=-\frac{20}{3}\cdot\frac{1}{8}+6\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{5}{6}+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=\frac{-5+9-3}{6}=\frac{1}{6}.$$

ОТВЕТ: $\Pi=\frac{1}{6}$.