Функции нескольких переменных
Касательная плоскость и нормаль

ЗАДАНИЕ.

Для кривой $\vec{r} = \vec{r}(t)$ *найти в точке* t_0 *уравнение касательной, уравнение нормальной плоскости и вычислить кривизну линии.*

$\vec{r}(t) = (t^2 - 3)\vec{i} + (t^3 + 2)\vec{j} + \ln t\,\vec{k}$, $t_0 = 1$.

РЕШЕНИЕ.

Выпишем для кривой значения в точке и значения производных:

$$x(t) = t^2 - 3; x(1) = -2$$
$$y(t) = t^3 + 2; y(1) = 3$$
$$z(t) = \ln t; z(1) = 0;$$
$$x'_t = 2t; x'_t(t_0) = 2;$$
$$y'_t = 3t^2; y'_t(t_0) = 3;$$
$$z'_t = \frac{1}{t}; z'_t(t_0) = 1;$$

Значит, уравнение касательной есть:

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-0}{1} \Rightarrow \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{1}$$

Вычислим вторые производные:

$$x''_t = 2; x''_t(t_0) = -1;$$
$$y''_t = 6t; y''_t(t_0) = 6;$$
$$z''_t = -\frac{1}{t^2}; z''_t(t_0) = -1;$$

Тогда уравнение нормальной плоскости записывается в виде

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-3 & z-0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x+2 & y-3 & z \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+2)(-3-6)-(y-3)(-2+1)+z(12+3)=0$$

$$-9(x+2)-(y-3)+15z=0$$

$$-9x-18-y+3+15z=0$$

$$9x+y-15z+15=0$$

Кривизну кривой найдем из формулы (опустим аргументы функции для удобства)

$$k=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{\left[(x')^2+(y')^2+(z')^2\right]^3}},$$ тогда

$$k=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{\left[2^2+3^2+1^2\right]^3}}=\frac{\sqrt{9^2+1^2+15^2}}{\sqrt{\left[2^2+3^2+1^2\right]^3}}=\frac{\sqrt{307}}{\sqrt{2744}}$$