Функции нескольких переменных
Экстремумы

Задание.

Найдите (локальные) экстремумы функции трех переменных

$f(x,y,z)=2x^2-xy+2xz-y+y^3+z^2$.

Решение.

Найдем стационарные точки (подозрительные на экстремум). Вычислим первые частные производные и приравняем к нулю.

$f'_x=\left(2x^2-xy+2xz-y+y^3+z^2\right)'_x=4x-y+2z$,

$f'_y=\left(2x^2-xy+2xz-y+y^3+z^2\right)'_y=-x-1+3y^2$,

$f'_z=\left(2x^2-xy+2xz-y+y^3+z^2\right)'_z=2x+2z$.

Получаем систему:

$$\begin{cases}4x-y+2z=0,\\-x-1+3y^2=0,\\2x+2z=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}-4z-y+2z=0,\\z-1+3y^2=0,\\x=-z;\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=-2z,\\z-1+3(-2z)^2=0,\\x=-z.\end{cases}$$

Находим z из второго уравнения:

$z-1+3(-2z)^2=0,$

$12z^2+z-1=0,$

$D=1+48=49,$

$z_{1,2}=\dfrac{-1\pm7}{24}=-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{4}.$

Возвращаемся к системе и получаем два решения:

$$\begin{cases} y = 2/3, \\ z = -1/3, \\ x = 1/3. \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y = -1/2, \\ z = 1/4, \\ x = -1/4. \end{cases}$$

Исследуем эти точки на экстремум.

Вычисляем матрицу Гессе. Для этого считаем вторые производные:

$$f''_{xx} = (4x - y + 2z)'_x = 4,$$

$$f''_{yy} = (-x - 1 + 3y^2)'_y = 6y,$$

$$f''_{zz} = (2x + 2z)'_z = 2.$$

$$f''_{xy} = (4x - y + 2z)'_y = -1,$$

$$f''_{yz} = (-x - 1 + 3y^2)'_z = 0,$$

$$f''_{zx} = (2x + 2z)'_x = 2.$$

Получаем матрицу:

$$H = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 6y & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Рассматриваем точку $M_1(1/3; 2/3; -1/3)$. В этой точке матрица Гессе равна:

$$H = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$ Вычисляем главные миноры:

$$\Delta_1 = 4 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 1 = 15 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -16 + 30 = 14 > 0.$$

Матрица положительно определена, значит, в точке $M_1(1/3; 2/3; -1/3)$ минимум функции. $f_{\min} = f(M_1) = -\dfrac{13}{27}$.

2) Рассматриваем точку $M_2(-1/4; -1/2; 1/4)$. В этой точке матрица Гессе равна:

$H = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Вычисляем главные миноры:

$\Delta_1 = 4 > 0$,

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -12 - 1 = -13 < 0$,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 12 - 26 = -14 < 0.$$

Матрица не является знакоопределенной, значит, в точке $M_2(-1/4; -1/2; 1/4)$ нет экстремума.