Функции нескольких переменных
Ряд Тэйлора

ЗАДАНИЕ.

Найти первые и вторые частные производные функции F и записать формулу Тэйлора в указанной точке x^0.

$F=\ln\left(2x+y+z\right)+\sin\left(2x+y+z\right)+x^2 2^{-2y},\;\; x^0=\left(1,1,0\right)$.

РЕШЕНИЕ. Вычисляем все необходимые производные.

Первого порядка:

$$F_x'=\left(\ln\left(2x+y+z\right)+\sin\left(2x+y+z\right)+x^2 2^{-2y}\right)_x'=\frac{2}{2x+y+z}+2\cos\left(2x+y+z\right)+2x\cdot 2^{-2y}.$$

$$F_y'=\left(\ln\left(2x+y+z\right)+\sin\left(2x+y+z\right)+x^2 2^{-2y}\right)_y'=\frac{1}{2x+y+z}+\cos\left(2x+y+z\right)-2x^2\cdot 2^{-2y}\ln 2.$$

$$F_z'=\left(\ln\left(2x+y+z\right)+\sin\left(2x+y+z\right)+x^2 2^{-2y}\right)_z'=\frac{1}{2x+y+z}+\cos\left(2x+y+z\right).$$

Второго порядка:

$$F_{xx}''=\left(\frac{2}{2x+y+z}+2\cos\left(2x+y+z\right)+2x\cdot 2^{-2y}\right)_x'=-\frac{4}{\left(2x+y+z\right)^2}-4\sin\left(2x+y+z\right)+2\cdot 2^{-2y}.$$

$$F_{yy}'=\left(\frac{1}{2x+y+z}+\cos\left(2x+y+z\right)-2x^2\cdot 2^{-2y}\ln 2\right)_y'=-\frac{1}{\left(2x+y+z\right)^2}-\sin\left(2x+y+z\right)+4x^2\cdot 2^{-2y}\ln^2 2.$$

$$F_{zz}'=\left(\frac{1}{2x+y+z}+\cos\left(2x+y+z\right)\right)_z'=-\frac{1}{\left(2x+y+z\right)^2}-\sin\left(2x+y+z\right).$$

$$F_{xy}''=\left(\frac{2}{2x+y+z}+2\cos\left(2x+y+z\right)+2x\cdot 2^{-2y}\right)_y'=-\frac{2}{\left(2x+y+z\right)^2}-2\sin\left(2x+y+z\right)-4x\cdot 2^{-2y}\ln 2.$$

$$F_{xz}''=\left(\frac{2}{2x+y+z}+2\cos\left(2x+y+z\right)+2x\cdot 2^{-2y}\right)_z'=-\frac{2}{\left(2x+y+z\right)^2}-2\sin\left(2x+y+z\right).$$

$$F_{yz}'=\left(\frac{1}{2x+y+z}+\cos\left(2x+y+z\right)-2x^2\cdot 2^{-2y}\ln 2\right)_z'=-\frac{1}{\left(2x+y+z\right)^2}-\sin\left(2x+y+z\right).$$

Найдем значения в точке $x^0=(1,1,0)$.

$$F_x'(1,1,0)=\frac{2}{3}+2\cos(3)+2\cdot 2^{-2}=2\cos 3+\frac{7}{6}.$$

$$F_y'(1,1,0)=\frac{1}{3}+\cos(3)-2\cdot 2^{-2}\ln 2=\frac{1}{3}+\cos 3-\frac{1}{2}\ln 2.$$

$$F_z'(1,1,0)=\frac{1}{3}+\cos(3).$$

$$F_{xx}''(1,1,0)=-\frac{4}{(3)^2}-4\sin(3)+2\cdot 2^{-2}=\frac{1}{18}-4\sin 3.$$

$$F_{yy}'(1,1,0)=-\frac{1}{(3)^2}-\sin(3)+4\cdot 2^{-2}\ln^2 2=-\frac{1}{9}-\sin 3+\ln^2 2.$$

$$F_{zz}'(1,1,0)=-\frac{1}{(3)^2}-\sin(3)=-\frac{1}{9}-\sin 3.$$

$$F_{xy}''(1,1,0)=-\frac{2}{(3)^2}-2\sin(3)-4\cdot 2^{-2}\ln 2=-\frac{2}{9}-2\sin 3-\ln 2.$$

$$F_{xz}''(1,1,0)=-\frac{2}{(3)^2}-2\sin(3)=-\frac{2}{9}-2\sin 3.$$

$$F_{yz}'(1,1,0)=-\frac{1}{(3)^2}-\sin(3)=-\frac{1}{9}-\sin 3.$$

Запишем формулу Тэйлора в точке $x^0=(1,1,0)$.

$$F(x,y,z)=F\left(x^0\right)+dF\left(x^0\right)+\frac{1}{2!}d^2F\left(x^0\right)+o\left(r^2\right), \text{ где } r=\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2}.$$

$$dF\left(x^0\right)=F_x'\left(x^0\right)\left(x-x_0\right)+F_y'\left(x^0\right)\left(y-y_0\right)+F_z'\left(x^0\right)\left(z-z_0\right),$$

$$d^2F\left(x^0\right)=F_{xx}''\left(x^0\right)\left(x-x_0\right)^2+F_{yy}''\left(x^0\right)\left(y-y_0\right)^2+F_{zz}''\left(x^0\right)\left(z-z_0\right)^2+$$
$$+2F_{xy}''\left(x^0\right)\left(x-x_0\right)\left(y-y_0\right)+2F_{xz}''\left(x^0\right)\left(x-x_0\right)\left(z-z_0\right)+2F_{yz}''\left(x^0\right)\left(y-y_0\right)\left(z-z_0\right)$$

Вычислим $F(1,1,0)=\ln(3)+\sin(3)+2^{-2}=\ln 3+\sin 3+\frac{1}{4}.$

Подставляем все в формулу:

$$F(x,y,z)=\left(\ln 3+\sin 3+\frac{1}{4}\right)+\left(2\cos 3+\frac{7}{6}\right)(x-1)+\left(\frac{1}{3}+\cos 3-\frac{1}{2}\ln 2\right)(y-1)+\left(\frac{1}{3}+\cos 3\right)z+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{18}-4\sin 3\right)(x-1)^2+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{9}-\sin 3+\ln^2 2\right)(y-1)^2+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{9}-\sin 3\right)z^2+$$

$$+\left(-\frac{2}{9}-2\sin 3-\ln 2\right)(x-1)(y-1)+\left(-\frac{2}{9}-2\sin 3\right)(x-1)z+\left(-\frac{1}{9}-\sin 3\right)(y-1)z+o\left(r^2\right)$$