Функции нескольких переменных
Частные производные

ЗАДАНИЕ.

Найти дифференциал второго порядка функции:

$$z = \operatorname{arctg}\frac{x}{(x+y)}$$

РЕШЕНИЕ. Находим производные первого порядка:

$$z'_x = \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{(x+y)}\right)'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{x+y}\right)^2}\left(\frac{x}{x+y}\right)'_x = \frac{(x+y)^2}{(x+y)^2+x^2}\left(\frac{1(x+y)-x\cdot 1}{(x+y)^2}\right) =$$

$$= \frac{(x+y)^2}{(x+y)^2+x^2}\frac{y}{(x+y)^2} = \frac{y}{(x+y)^2+x^2}$$

$$z'_y = \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{(x+y)}\right)'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{x+y}\right)^2}\left(\frac{x}{x+y}\right)'_y = \frac{(x+y)^2}{(x+y)^2+x^2}\left(-\frac{x}{(x+y)^2}\right) = -\frac{x}{(x+y)^2+x^2}$$

Теперь находим производные второго порядка

$$z''_{xx} = \left(\frac{y}{(x+y)^2+x^2}\right)'_x = -\frac{y}{\left((x+y)^2+x^2\right)^2}\left((x+y)^2+x^2\right)'_x =$$

$$= -\frac{y}{\left((x+y)^2+x^2\right)^2}\left(2(x+y)+2x\right) = -\frac{y(4x+2y)}{\left((x+y)^2+x^2\right)^2}$$

$$z''_{yy} = \left(-\frac{x}{(x+y)^2+x^2}\right)'_y = \frac{x}{\left((x+y)^2+x^2\right)^2}\left((x+y)^2+x^2\right)'_y =$$

$$= \frac{x}{\left((x+y)^2+x^2\right)^2}\left(2(x+y)\right) = \frac{2x(x+y)}{\left((x+y)^2+x^2\right)^2}.$$

$$z''_{yx}=\left(-\frac{x}{(x+y)^2+x^2}\right)'_x=-\frac{1}{(x+y)^2+x^2}+\frac{x}{\left((x+y)^2+x^2\right)^2}\left((x+y)^2+x^2\right)'_x=$$

$$=-\frac{1}{(x+y)^2+x^2}+\frac{x\left(2(x+y)+2x\right)}{\left((x+y)^2+x^2\right)^2}=-\frac{1}{(x+y)^2+x^2}+\frac{x(4x+2y)}{\left((x+y)^2+x^2\right)^2}.$$

Тогда дифференциал второго порядка равен:

$$d^2z=z''_{xx}dx^2+2z''_{xy}dxdy+z''_{yy}dy^2=$$

$$=-\frac{y(4x+2y)}{\left((x+y)^2+x^2\right)^2}dx^2+2\left[-\frac{1}{(x+y)^2+x^2}+\frac{x(4x+2y)}{\left((x+y)^2+x^2\right)^2}\right]dxdy+\frac{2x(x+y)}{\left((x+y)^2+x^2\right)^2}dy^2.$$