Тема: Теория игр

ЗАДАНИЕ. Найти стратегии игроков А, В и цену игры, заданной матрицей (с помощью формул и графически)

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 0 \\ 6 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

РЕШЕНИЕ. Найдем наилучшую стратегию первого игрока: минимальное число в каждой строке обозначим α_i. Получаем: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -1$. Выберем максимальное из этих значений $\alpha = 0$ - нижняя цена игры.
Аналогично для второго игрока. Найдем максимальные значения выигрыша по столбцам: $\beta_1 = 6$, $\beta_2 = 5$, $\beta_3 = 3$, $\beta_4 = 5$ и минимальное из этих чисел $\beta = 3$ - верхняя цена игры.

Так как верхняя и нижняя цены игры различны, игра не имеет решения в чистых стратегиях, цена игры находится в промежутке от 0 до 3 (между нижней и верхней ценой игры).

Игра имеет большую размерность, попробуем ее уменьшить, выделив невыгодные стратегии и вычеркнув их из матрицы: все элементы столбца B1 больше элементов столбца B3, поэтому вычеркиваем столбец B1.

$$\begin{pmatrix} - & 5 & 2 & 0 \\ - & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Получили матрицу (A1, A2, B2, B3, B4):

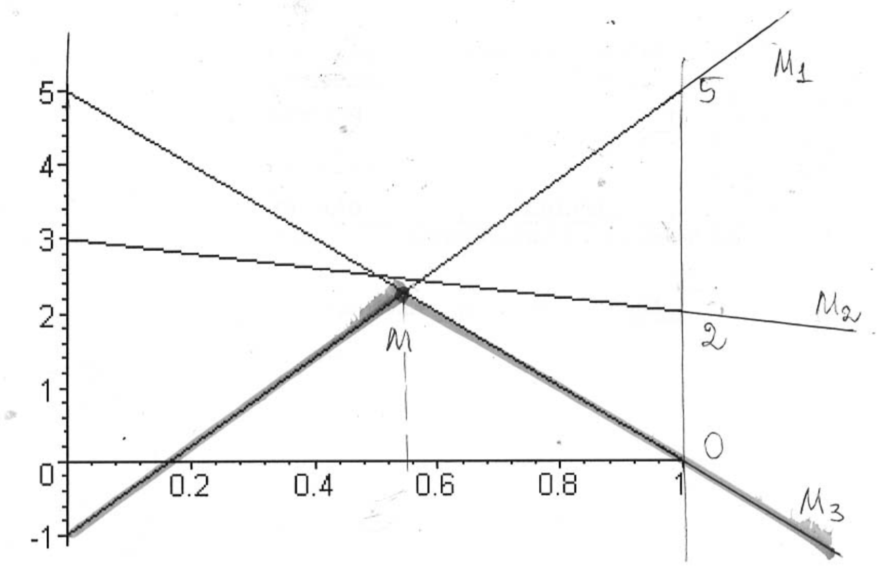
$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Теперь найдем решение игры, заданной данной платежной матрицей в смешанных стратегиях.

Найдем две активные стратегии игрока B. Для этого определим оптимальные смешанные стратегии игрока A.
Игрок B имеет три чистые стратегии, им будут соответствовать три прямые в геометрическом решении игры.

Вычислим средний выигрыш первого игрока, при условии, что он применяет свою смешанную стратегию, а второй – свою чистую j-ю стратегию:
$M_j(x_1) = (a_{1j} - a_{2j})x_1 + a_{2j}$.
Получаем:
$M_1(x_1) = (a_{11} - a_{21})x_1 + a_{21} = 6x_1 - 1$,
$M_2(x_1) = (a_{12} - a_{22})x_1 + a_{22} = -x_1 + 3$,
$M_3(x_1) = (a_{13} - a_{23})x_1 + a_{23} = -5x_1 + 5$.

Строим соответствующие прямые линии в прямоугольной системе координат:



Цель второго игрока – минимизировать выигрыш первого за счет выбора своих стратегий, поэтому берем самые нижние отрезки. Цель первого игрока – максимизировать выигрыш за счет выбора x_1, поэтому берем самую высокую точку M (см. чертеж).

Те линии стратегии, пересечением которых образована точка M, являются активными стратегиями игрока B, в нашем случае это B_1 и B_3. Таким образом, игра сводится к игре 2×2 с матрицей $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Находим оптимальные стратегии:

$6x_1 - 1 = -5x_1 + 5 = v$,

$x_1 + x_2 = 1$.

Откуда $x_1 = \frac{6}{11},\ x_2 = \frac{5}{11},\ v = \frac{25}{11}$.

Теперь найдем стратегии второго игрока:

$5q_1 + 0q_2 = v = \frac{25}{11} \Rightarrow q_1 = \frac{5}{11},\ q_2 = \frac{6}{11}$.

Получили $P^* = \left(\frac{6}{11};\frac{5}{11}\right)$, $Q^* = \left(0;\frac{5}{11};0;\frac{6}{11}\right)$. $v = \frac{25}{11}$ - цена игры.