Решение игры с платежной матрицей 2×2 аналитическим методом

ЗАДАНИЕ.
Найти решение и цену игры, заданной следующей платежной матрицей:

$$A=\begin{pmatrix}12 & 22\\ 32 & 2\end{pmatrix}$$

РЕШЕНИЕ.

Попробуем найти седловую точку данной платежной матрицы.
Найдем наилучшую стратегию первого игрока: минимальное число в каждой строке обозначим α_i. Получаем: $\alpha_1=12$, $\alpha_2=2$. Выберем максимальное из этих значений $\alpha=12$ - нижняя цена игры, стратегия A1.
Аналогично для второго игрока. Найдем максимальные значения выигрыша по столбцам: $\beta_1=32$, $\beta_2=22$ и минимальное из этих чисел $\beta=22$ - верхняя цена игры, стратегия B2.

Так как верхняя и нижняя цены игры различны, игра не имеет решения в чистых стратегиях (седловой точки нет), цена игры находится в промежутке от 12 до 22 (между нижней и верхней ценой игры).

Решим данную игру аналитическим методом.
Средний выигрыш первого игрока, если он использует оптимальную смешанную стратегию $x^*=\left(x_1^*,x_2^*\right)$, а второй игрок – чистую стратегию, соответствующую первому столбцу платежной матрицы, равен цене игры v:
$12x_1^*+32x_2^*=v$.
Тот же средний выигрыш получает первый игрок, если второй игрок применяет стратегию, соответствующую второму столбцу платежной матрицы, то есть
$22x_1^*+2x_2^*=v$.
Учитывая, что $x_1^*+x_2^*=1$, получаем систему уравнений для определения оптимальной стратегии первого игрока и цены игры:

$$\begin{cases}12x_1^*+32x_2^*=v,\\ 22x_1^*+2x_2^*=v,\\ x_1^*+x_2^*=1.\end{cases}$$

Решаем эту систему и находим:

$$\begin{cases}12x_1^*+32x_2^*=22x_1^*+2x_2^*,\\ v=22x_1^*+2x_2^*,\\ x_1^*=1-x_2^*.\end{cases}$$

$$\begin{cases}-10x_1^*+30x_2^*=0,\\ v=22x_1^*+2x_2^*,\\ x_1^*=1-x_2^*.\end{cases}$$

$$\begin{cases} -\left(1-x_2^*\right)+3x_2^*=0, \\ v=22x_1^*+2x_2^*, \\ x_1^*=1-x_2^*. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_2^*=1, \\ v=22x_1^*+2x_2^*, \\ x_1^*=1-x_2^*. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^*=3/4, \\ x_2^*=1/4, \\ v=17. \end{cases}$$

Применяя теорему об активных стратегиях при отыскании смешанной стратегии второго игрока, получаем, что при любой чистой стратегии первого игрока средний проигрыш второго игрока равен цене игры, то есть:

$$\begin{cases} 12y_1^*+22y_2^*=17, \\ 32y_1^*+2y_2^*=17, \\ y_1^*+y_2^*=1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12\left(1-y_2^*\right)+22y_2^*=17, \\ y_1^*+y_2^*=1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12-12y_2^*+22y_2^*=17, \\ y_1^*=1-y_2^*. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2^*=1/2, \\ y_1^*=1/2. \end{cases}$$

Отсюда находим $y_1*=1/2$, $y_2*=1/2$.

Игра решена. Оптимальные смешанные стратегии $X^*=\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right)$, $Y^*=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, цена игры $v=17$.