Решение игры с платежной матрицей 3×4 сведением к задаче линейного программирования

ЗАДАНИЕ.
Дана матрица игры. Привести игру к задаче линейного программирования. Решить игру в смешанных стратегиях.

2	4	8	5
6	2	4	6
3	2	5	4

РЕШЕНИЕ. Матрица игры $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 5 \\ 6 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Игра имеет большую размерность, попробуем ее уменьшить, выделив невыгодные стратегии и вычеркнув их из матрицы (выполняем доминирование):

1. Все элементы столбца B3 больше или равны элементам столбца B2, поэтому вычеркиваем столбец B3

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & & 5 \\ 6 & 2 & & 6 \\ 3 & 2 & & 4 \end{pmatrix}$$

2. Все элементы столбца B4 больше или равны элементам столбца B2, поэтому вычеркиваем столбец B4.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & & \\ 6 & 2 & & \\ 3 & 2 & & \end{pmatrix}$$

3. Так как все элементы строки A3 меньше или равны элементам строки A2, вычеркиваем строку A3.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & & \\ 6 & 2 & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Получили матрицу (A1, A2, B1, B2): $\widetilde{A}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Составим пару симметричных двойственных задач, так чтобы исходная задача была стандартной задачей максимизации, матрица коэффициентов совпадала с платежной матрице A, а коэффициенты при неизвестных в целевой функции и свободные члены неравенств были бы равны единице.

$f(x)=x_1+x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 1, \\ 6x_1 + 2x_2 \le 1, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$g(y) = y_1 + y_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} 2y_1 + 6y_2 \ge 1, \\ 4y_1 + 2y_2 \ge 1, \\ y_1, y_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решаем первую задачу симплекс-методом. Приводим к каноническому виду:

$$f(x) = x_1 + x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1, \\ 6x_1 + 2x_2 + x_4 = 1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Составляем симплекс-таблицу и решаем задачу преобразованием таблиц:

Базис	**План**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**
x3	1	2	4	1	0
x4	1	6	2	0	1
f	0	-1	-1	0	0
Базис	**План**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**
x3	2/3	0	10/3	1	-1/3
x1	1/6	1	1/3	0	1/6
f	1/6	0	-2/3	0	1/6
Базис	**План**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**
x2	**1/5**	0	1	3/10	-1/10
x1	**1/10**	1	0	-1/10	1/5
f	**3/10**	0	0	**1/5**	**1/10**

Находим:

$$x_1 = \frac{1}{10},\ x_2 = \frac{1}{5},\ f_{\max} = \frac{3}{10}.$$
$$y_1 = \frac{1}{5},\ y_2 = \frac{1}{10},\ g_{\min} = \frac{3}{10}.$$

Из решений пары двойственных задач получим цену игры и оптимальные стратегии игроков:

$$\tilde{v} = \frac{1}{f_{\max}} = \frac{10}{3},$$
$$\tilde{S}_A = vY = \frac{10}{3}\left(\frac{1}{5};\frac{1}{10}\right) = \left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right),$$

$$\tilde{S}_B = vX = \frac{10}{3}\left(\frac{1}{10};\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right).$$

Оптимальные стратегии для исходной игры:
$S_A = \left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};0;0\right)$, $S_B = \left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};0;0\right)$, цена игры $v = \frac{10}{3}$.