

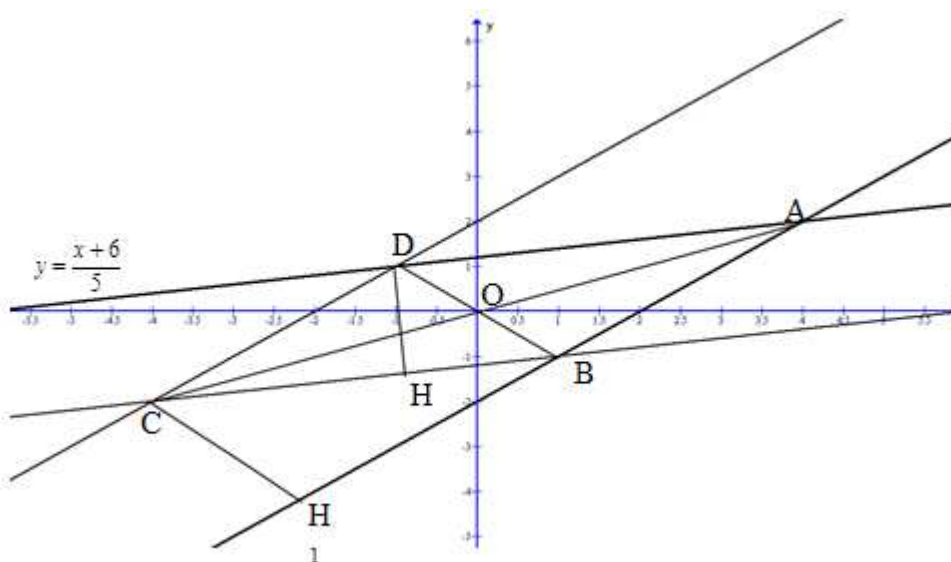
## Аналитическая геометрия на плоскости

### Пример решения задачи

**Задача.** Две стороны параллелограмма заданы уравнениями  $y = x - 2$  и  $5y = x + 6$ , диагонали его пересекаются в начале координат. Найдите длины его высот.

**Решение.**

Сделаем чертеж:



Пусть  $A(x_1; y_1)$ ;  $B(x_2; y_2)$ ;  $C(x_3; y_3)$ ;  $D(x_4; y_4)$  – вершины параллелограмма.

$A(x_1; y_1)$  - точка пересечения прямых  $AD$  ( $5y = x + 6$ ) и  $AB$  ( $y = x - 2$ )

$$\begin{cases} y = x - 2, \\ y = \frac{1}{5}x + \frac{6}{5}; \end{cases}$$

$$x - 2 = \frac{1}{5}x + \frac{6}{5},$$

$$5x - x = 10 + 6;$$

$$x = 4; \quad y = 2.$$

$$A(4; 2)$$

Точка С симметрична точке А относительно начала координат,  
 $C(x_3; y_3)$  или  $C(-x_1; -y_1)$ . Следовательно:

$$C(-4; -2).$$

Так как  $CB \parallel AD$ , то  $k_{CB} = k_{AD} = \frac{1}{5}$

$$CB: y - y_3 = k_{CB}(x - x_3);$$

$$y + 2 = \frac{1}{5}(x + 4);$$

$$y = \frac{1}{5}x - \frac{6}{5}.$$

$B(x_2; y_2)$  - точка пересечения прямых  $CB$  ( $y = \frac{1}{5}x - \frac{6}{5}$ ) и  $AB$  ( $y = x - 2$ )

$$\begin{cases} y = x - 2, \\ y = \frac{1}{5}x - \frac{6}{5}; \end{cases}$$

$$x - 2 = \frac{1}{5}x - \frac{6}{5},$$

$$5x - x = 10 - 6;$$

$$x = 1; \quad y = -1.$$

$$B(1; -1).$$

Координаты точки D, симметричны точке В относительно начала координат:  $D(-1; 1)$

Так как  $DH \perp CB$ , то  $k_{DH} = -\frac{1}{k_{CB}} = -5$ .

Составим уравнение  $DH$  по формуле  $y - y_4 = k_{DH}(x - x_4)$ ,

$$DH: y - 1 = -5(x + 1); y = -5x - 4; -5x - y - 4 = 0.$$

Длину высоты  $DH$  найдем по формуле:  $d = \frac{|Ax_4 + By_4 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$  - расстояние

от точки  $D$  до прямой

$$BC (x - 5y - 6 = 0).$$

$$DH = \frac{|Ax_4 + By_4 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|1 \cdot (-1) - 5 \cdot 1 - 6|}{\sqrt{1^2 + (-5)^2}} = \frac{12}{\sqrt{26}}$$

Длина высоты  $CH_1$  – расстояние от точки  $C$  до прямой  $AB$

$$AB (x - y - 2 = 0).$$

$$DH = \frac{|Ax_3 + By_3 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|1 \cdot (-4) - 1 \cdot (-2) - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}.$$

**Ответ.**  $\frac{12}{\sqrt{26}}; \frac{4}{\sqrt{2}}.$