Тема: аналитическая геометрия на плоскости

ЗАДАНИЕ. *Даны уравнения двух сторон треугольника* $4x-5y+9=0$ *и* $x+4y-3=0$. *Найти уравнение третьей стороны, если известно, что медианы этого треугольника пересекаются в точке* $P(3;1)$.

РЕШЕНИЕ.
Найдем точку пересечения двух данных сторон треугольника:

$$\begin{cases}4x-5y+9=0,\\ x+4y-3=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}-16y+12-5y+9=0,\\ x=-4y+3;\end{cases}$$

$$\begin{cases}-21y=-21,\\ x=-4y+3;\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=1,\\ x=-1.\end{cases}$$

Получили вершину $A(-1;1)$.

Известно, что точка пересечения медиан делит медиану в отношении 2:1, считая от вершины, то есть для точки пересечения P верно: $AP:PD=2:1=2=\lambda$, поэтому координаты точки D (середины стороны BC) можно найти из соотношений:

$$x_P=\frac{x_A+\lambda x_D}{1+\lambda},\ y_P=\frac{y_A+\lambda y_D}{1+\lambda}.$$

$$3=\frac{-1+2x_D}{1+2},\ 9=-1+2x_D,\ x_D=5$$

$$1=\frac{1+2y_D}{1+2},\ 3=1+2y_D,\ y_D=1.$$

Получили $D(5;1)$ - середина стороны BC. Точки B,C лежат на прямой BC, проходящей через точку $D(5;1)$, ее можно записать в виде: $y=kx+1-5k$. Тогда

$B(x_B,kx_B+1-5k)$, $C(x_C,kx_C+1-5k)$.

Пусть точка B лежит на прямой $4x-5y+9=0$, получаем уравнение:

$$4x_B-5(kx_B+1-5k)+9=0.$$

Пусть точка C лежит на прямой $x+4y-3=0$, получаем уравнение:

$$x_C+4(kx_C+1-5k)-3=0.$$

Учтем также, что $D(5;1)$ - середина стороны BC, получим уравнение $x_B+x_C=10$.

Получили систему:

$$\begin{cases}4x_B-5(kx_B+1-5k)+9=0,\\ x_C+4(kx_C+1-5k)-3=0,\\ x_B+x_C=10.\end{cases}$$

Решая эту систему, находим $k=-8/11$, $x_B=13/7$, $x_C=57/7$.

Тогда уравнение прямой BC:

$$y=-\frac{8}{11}x+1-5\left(-\frac{8}{11}\right),$$

$$y=-\frac{8}{11}x+1+\frac{40}{11},$$

$$y=-\frac{8}{11}x+\frac{51}{11}.$$

Сделаем схематический чертеж: