Тема: Исследование функции и построение графика

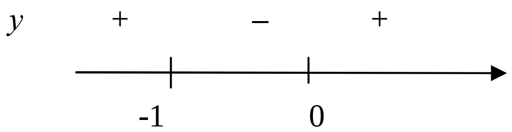
Задание. *Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить график.*

$$y=\frac{x}{\sqrt{x^2+x}}$$

Решение:

1) Область определения функции:

$$x^2+x>0,$$
$$x(x+1)>0,$$
$$x_1=0,\ x_2=-1.$$



Получаем, что $D(y)=(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$

Рассмотрим пределы:

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}}=\frac{-1}{\sqrt{1-1}}=\frac{-1}{0}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{\sqrt{1+1/x}}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0.$$

Получаем, что $x=-1$ - односторонняя вертикальная асимптота.

2) Точки пересечения с осями координат:

$$Ox:\ y=\frac{x}{\sqrt{x^2+x}}=0,\ \Rightarrow x=0\notin D(y),$$
$$Oy:\ x=0\notin D(y).$$

3) Функция общего вида, так как область определения несимметрична относительно начала координат.

4) Экстремумы и монотонность.

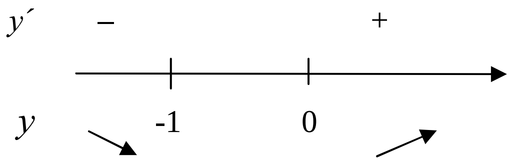
Найдем первую производную функции:

$$y'=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+x}}\right)'=\frac{1\sqrt{x^2+x}-x\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+x}}(2x+1)}{(\sqrt{x^2+x})^2}=\frac{2x^2+2x-x(2x+1)}{2(\sqrt{x^2+x})^3}=.$$

$$=\frac{2x^2+2x-2x^2-x}{2(\sqrt{x^2+x})^3}=\frac{x}{2(\sqrt{x^2+x})^3}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+x}(x+1)}$$

Критические точки: $x_1 = 0,\ x_2 = -1.$

Исследуем знак производной на интервалах, на которые критические точки делят области определения функции.



Функция убывает на интервале $(-\infty; -1)$, возрастает на интервале $(0; +\infty)$. Экстремумов нет.

5) Выпуклость и точки перегиба.

Найдем вторую производную функции:

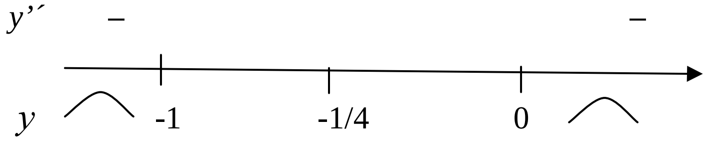
$$y'' = \left(\frac{x}{2(\sqrt{x^2+x})^3} \right)' = \frac{1}{2} \frac{1(\sqrt{x^2+x})^3 - x \cdot 3(\sqrt{x^2+x})^2 \dfrac{1}{2(\sqrt{x^2+x})}(2x+1)}{(\sqrt{x^2+x})^6} =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{2(\sqrt{x^2+x})^2 - x \cdot 3(2x+1)}{(\sqrt{x^2+x})^5} = \frac{1}{4} \frac{2x^2+2x-6x^2-3x}{(\sqrt{x^2+x})^5} = \frac{1}{4} \frac{-4x^2-x}{(\sqrt{x^2+x})^5} = \quad .$$

$$= -\frac{1}{4} \frac{x(4x+1)}{(\sqrt{x^2+x})^5} = -\frac{1}{4} \frac{x(4x+1)}{(\sqrt{x}\sqrt{x+1})^5}$$

Приравниваем к нулю и находим критические точки: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ и $x_3 = -1/4$.

Исследуем знак производной на интервалах, на которые критические точки делят области определения функции.



Функция выпукла вверх на интервалах $(-\infty; -1)$, $(0; +\infty)$, точек перегиба нет.

6) Найдем наклонные асимптоты вида $y = kx + b$

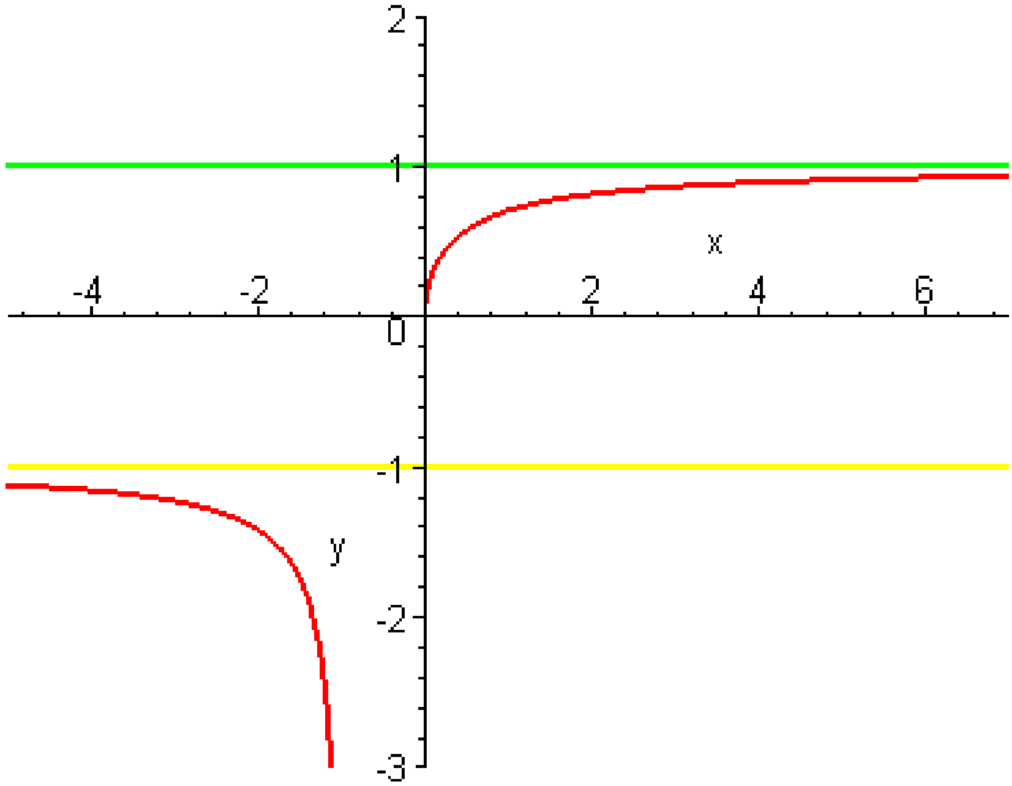
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x}} = 0,$$

$$b_1=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/x}}=1.$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}(y-kx)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2-x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-1/x}}=-1.$$

Таким образом, $y=1$ и $y=-1$ - горизонтальные асимптоты.

7) Построим график функции.



(красным – функция, зеленым – асимптота $y=1$, желтым – асимптота $y=-1$).