Пример решения задачи
Исследование неявно заданной функции.
Переход к полярным координатам. Построение графика

ЗАДАНИЕ.

Исследовать функцию и построить ее график. $(x^2+y^2)^3 = 4x^2y^2$.

РЕШЕНИЕ.

Чтобы исследовать и построить график этой функции перейдем к полярной системе координат $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$

$$(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)^3 = 4r^2\cos^2\varphi r^2\sin^2\varphi \Rightarrow r^6 = 4r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r^2 = \sin^2 2\varphi \Rightarrow r = \pm\sin 2\varphi.$$

Исследуем функцию $r = \sin 2\varphi$ и построим ее график. Чтобы получить график функции $r = -\sin 2\varphi$ отобразим график функции $r = \sin 2\varphi$ симметрично относительно оси Ox.

1. Область определения функции.

Для $r \ge 0$ $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$.

2. Функция нечетная, так как $r(-\varphi) = \sin(-2\varphi) = -\sin 2\varphi = -r(\varphi)$. Значит, график симметричен относительно начала координат. Исследуем функцию на интервале $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ и отобразим полученный график симметрично относительно начала координат.

3. Видно, что функция периодическая с главным периодом π.

4. Вычислим производную функции:

$$\frac{dr}{d\varphi} = 2\cos 2\varphi.$$

Найдем критические точки. Для этого решим уравнение $2\cos 2\varphi = 0$, На интервале $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ имеем единственное решение $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

При $0<\varphi<\frac{\pi}{4}$ $\frac{dr}{d\varphi}>0$, следовательно, модуль радиус-вектора на этом интервале возрастает.

При $\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{\pi}{2}$ $\frac{dr}{d\varphi}<0$, следовательно, модуль радиус-вектора на этом интервале убывает.

Так как при переходе через точку $\varphi=\frac{\pi}{4}$ производная меняет знак из плюса на минус, то в этой точке имеем максимум. $r\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$.

5. Исследуем вторую производную.

$$\frac{d^2r}{d\varphi^2}=-4\sin 2\varphi.$$

Решим уравнение $\frac{d^2r}{d\varphi^2}=0$.

$$-4\sin 2\varphi=0;$$

На интервале $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ имеем решения $\varphi=0, \varphi=\frac{\pi}{2}$.

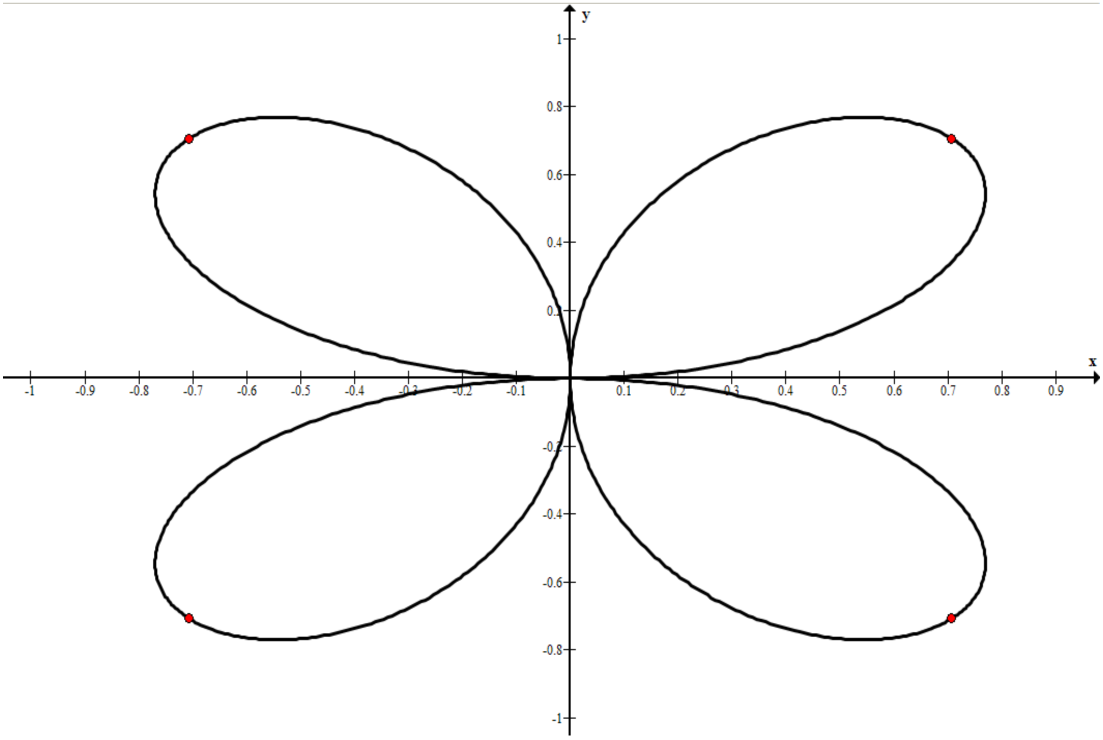
При $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ $\frac{d^2r}{d\varphi^2}<0$, следовательно, кривая выгнута.

Точек перегиба нет.

6. Асимптоты.

Так как нет точек, при которых $\lim\limits_{\varphi\to\varphi_0} r=\infty$, следовательно, асимптот нет.

7. На основании проведенных исследований строим график функции.


y
x
1
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-0.9
-0.7
-0.5
-0.3
-0.1
0.1
0.3
0.5
0.7
0.9