Пример решения задачи
Исследование периодической функции. Построение графика

Задание.

Провести полное исследование периодической функции

y = cos3x– 2sin 6x и построить её график.

Решение.

1. Функция $y = \cos 3x - 2\sin 6x$ периодическая с периодом $T = \frac{2\pi}{3}$.

Так как $y(-x) = \cos(-3x) - 2\sin(-6x) = \cos(3x) + 2\sin(6x) \approx \pm y(x)$ - функция ни четная, ни нечетная, следовательно, функция общего вида.

Так как функция периодическая, исследуем функцию на интервале $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

Найдем точки пересечения графика функции с осями координат.

С осью Оу:

$x = 0 \to y = \cos 0 - 2\sin 0 = 1$, - точка $(0;1)$.

С осью Ох:

$y = 0 \to \cos 3x - 2\sin 6x = 0 \to \cos 3x - 4\sin 3x \cos 3x = 0 \to \cos 3x(1 - 4\sin 3x) = 0 \to$

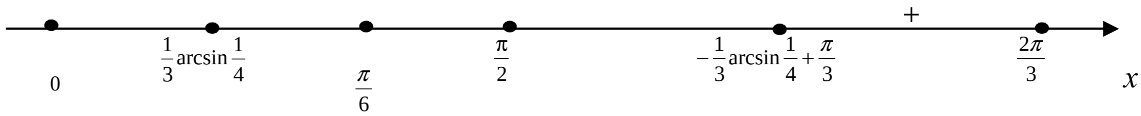
$$\left[\begin{array}{l}\cos 3x = 0,\\ 1 - 4\sin 3x = 0;\end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l}3x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z,\\ 3x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{4} + \pi k, k \in Z;\end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z,\\ x = (-1)^k \frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{4} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z;\end{array}\right.$$

На интервале $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ получим точки

$$\left(\frac{\pi}{6};0\right), \left(\frac{\pi}{2};0\right), \left(\frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{4};0\right), \left((-1)\cdot\frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{4} + \frac{\pi}{3};0\right).$$

Установим интервалы знакопостоянства:

y $+$ $-$ $+$ $-$



Функция положительна на интервалах $\left(0;\frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{4}+\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right)$.

Функция отрицательна на интервалах $\left(\frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{4};\frac{\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2};-\frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$.

Функция непрерывна на интервале $(-\infty;+\infty)$.

2. Так как функция непрерывна, то вертикальных асимптот нет.

Наклонных асимптот функция не имеет.

3. Найдем интервалы монотонности функции и точки экстремумы.

Вычислим первую производную:

$y' = (\cos 3x - 2\sin 6x)' = -3\sin 3x - 12\cos 6x$.

Находим критические точки. Для этого решим уравнение $f'(x)=0$:

$y'(x) = -3\sin 3x - 12\cos 6x = 0$;

$\sin 3x + 4\cos 6x = 0$;

$\sin 3x + 4(1-2\sin^2 3x) = 0$;

$-8\sin^2 3x + \sin 3x + 4 = 0$.

Пусть $\sin 3x = t, -1 \le t \le 1$, получим:

$-8t^2 + t + 4 = 0$;

$D = 1 - 4\cdot(-8)\cdot 4 = 1 + 128 = 129$,

$t_1 = \frac{-1-\sqrt{129}}{-16} \approx 0.7724$,

$t_2 = \dfrac{-1+\sqrt{129}}{-16} \approx -0.6474$.

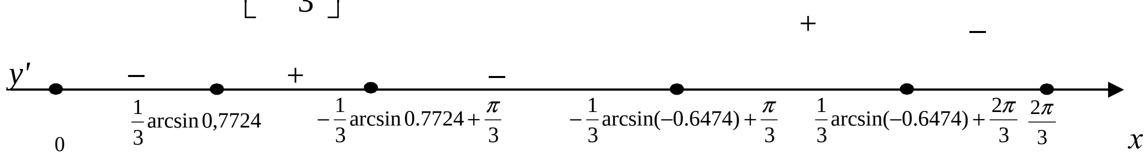
Выполним обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l}\sin 3x = 0.7724,\\ \sin 3x = -0.6474;\end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l}3x = (-1)^n \arcsin 0.7724 + \pi n, n \in Z,\\ 3x = (-1)^k \arcsin(-0.6474) + \pi k, k \in Z.\end{array}\right. \to$$

$$\left[\begin{array}{l}x = (-1)^n \dfrac{1}{3}\arcsin 0.7724 + \dfrac{\pi}{3}n, n \in Z,\\ x = (-1)^k \dfrac{1}{3}\arcsin(-0.6474) + \dfrac{\pi}{3}k, k \in Z.\end{array}\right.$$

На интервале $\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]$ получим точки $\left(\dfrac{1}{3}\arcsin 0{,}7724;-1{,}33\right)$, $\left(-\dfrac{1}{3}\arcsin 0.7724+\dfrac{\pi}{3};1{,}33\right)$, $\left(-\dfrac{1}{3}\arcsin(-0.6474)+\dfrac{\pi}{3};-2{,}73\right)$, $\left(\dfrac{1}{3}\arcsin(-0.6474)+\dfrac{2\pi}{3};2{,}73\right)$.

Исследуем знак производной на интервалах, на которые критические точки делят интервал $\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]$:



Функция убывает на интервалах $\left(0;\dfrac{1}{3}\arcsin 0{,}7724\right)$, $\left(-\dfrac{1}{3}\arcsin 0.7724+\dfrac{\pi}{3};-\dfrac{1}{3}\arcsin(-0.6474)+\dfrac{\pi}{3}\right)$, $\left(\dfrac{1}{3}\arcsin(-0.6474)+\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Функция возрастает на интервалах $\left(\dfrac{1}{3}\arcsin 0{,}7724;-\dfrac{1}{3}\arcsin 0.7724+\dfrac{\pi}{3}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{3}\arcsin(-0.6474)+\dfrac{\pi}{3};\dfrac{1}{3}\arcsin(-0.6474)+\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Функция имеет максимум в точках:

$y_{\max}\left(-\dfrac{1}{3}\arcsin 0.7724+\dfrac{\pi}{3}\right) = 1{,}33,$

$$y_{\max}\left(\frac{1}{3}\arcsin(-0.6474)+\frac{2\pi}{3}\right)=2{,}73,.$$

Функция имеет минимум в точках:

$$y_{\min}\left(\frac{1}{3}\arcsin 0{,}7724\right)=-1{,}33,$$

$$y_{\min}\left(-\frac{1}{3}\arcsin(-0.6474)+\frac{\pi}{3}\right)=-2{,}73.$$

4. Промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба.

Вычислим вторую производную:

$$y''=(-3\sin 3x-12\cos 6x)'=-9\cos 3x+72\sin 6x=-9\cos 3x+144\sin 3x\cos 3x=$$
$$=-9\cos 3x(1-16\sin 3x).$$

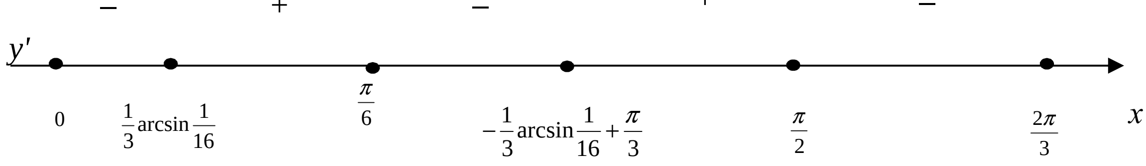
Находим критические точки:

$$-9\cos 3x(1-16\sin 3x)=0\to\left[\begin{array}{l}\cos 3x=0,\\ 1-16\sin 3x=0;\end{array}\right.\to\left[\begin{array}{l}\cos 3x=0,\\ \sin 3x=\dfrac{1}{16};\end{array}\right.\to$$

$$\to\left[\begin{array}{l}3x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z,\\ 3x=(-1)^n\arcsin\dfrac{1}{16}+\pi k, k\in Z,\end{array}\right.\to\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{3}, n\in Z,\\ x=(-1)^n\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{1}{16}+\dfrac{\pi k}{3}, k\in Z.\end{array}\right.$$

На интервале $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$ получим точки $\left(\frac{\pi}{6};0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$, $\left(\frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{16};0{,}75\right)$, $\left(-\frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{16}+\frac{\pi}{3};-0{,}75\right)$.

Исследуем знак производной на интервалах, на которые критические точки делят интервал $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$:



Функция выпукла вверх на интервалах $\left(0;\frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{16}\right)$, $\left(\frac{\pi}{6};-\frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{16}+\frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right)$.

Функция выпукла вниз на интервалах $\left(\frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{16};\frac{\pi}{6}\right)$, $\left(-\frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{16}+\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right)$.

Точки перегиба:

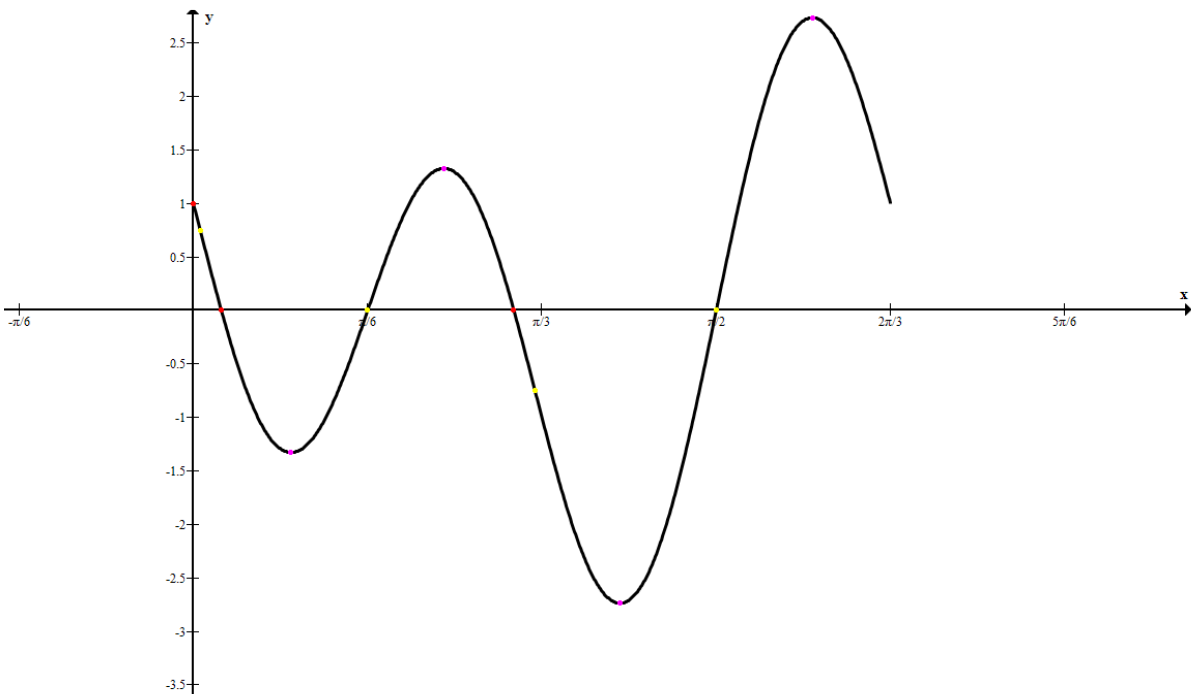
$x_1=\frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{16}$;

$x_2=\frac{\pi}{6}$;

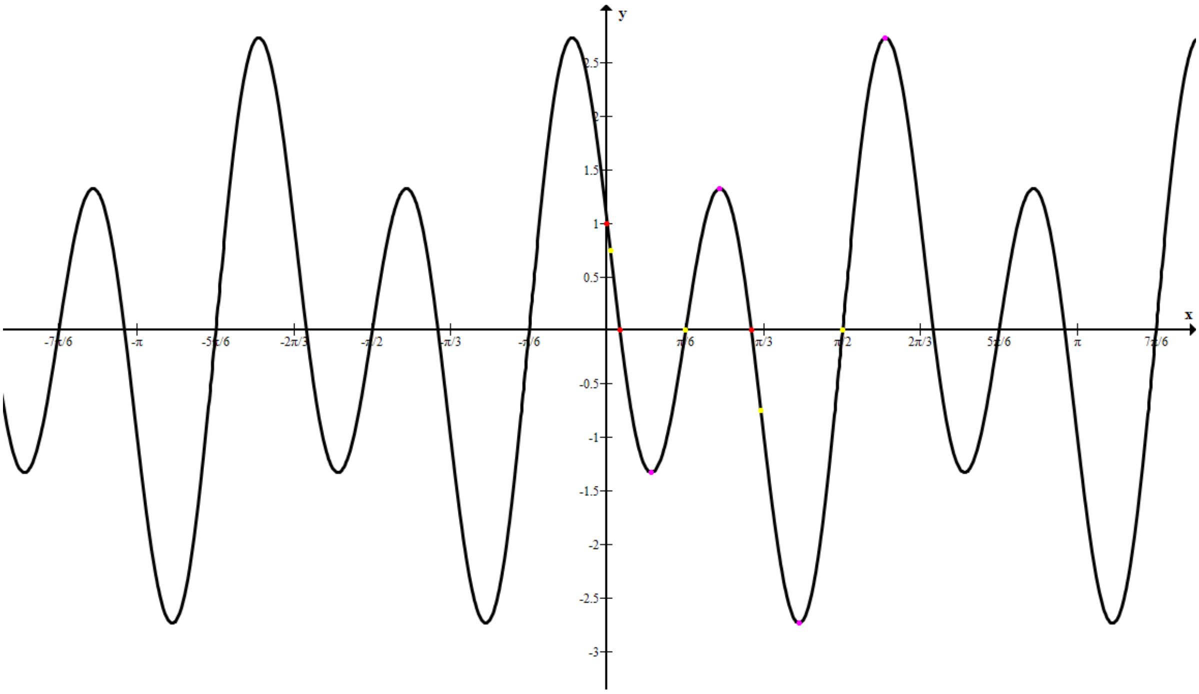
$x_3=-\frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{16}+\frac{\pi}{3}$;

$x_4=\frac{\pi}{2}$.

5. На основании проведенных исследований строим график функции:



Повторим этот график с периодичностью $T=\frac{2\pi}{3}$.


y
x
2.5
2
1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-7π/6
-π
-5π/6
-2π/3
-π/2
-π/3
-π/6
π/6
π/3
π/2
2π/3
5π/6
π
7π/6