

### Пример решения задачи Исследование функции и построение графика в Excel

ЗАДАНИЕ.

Провести полное исследование и построить график функции  $y = f(x)$  с помощью Excel. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке  $[-3; -1]$ .

$$y = \frac{4 - x^3}{x^2}$$

РЕШЕНИЕ. 1) Область определения функции  $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ , поскольку формула, с помощью которой задана функция, имеет смысл при всех значениях кроме точки  $x = 0$ , которая является точкой разрыва 2-го рода функции. Действительно,

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{4 - x^3}{x^2} = \left| \frac{4 - x^3 \rightarrow 4}{x^2 \rightarrow +0} \right| = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{4 - x^3}{x^2} = \left| \frac{4 - x^3 \rightarrow 4}{x^2 \rightarrow +0} \right| = +\infty$$

Таким образом,  $x = 0$  - вертикальная асимптота.

2) Определим пересечение графика функции с осью  $Ox$ :

$$y = \frac{4 - x^3}{x^2} = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{4}$$

Единственная точка пересечения графика функции с осью  $Ox$ :  $(\sqrt[3]{4}; 0)$ , с осью  $Oy$  пересечений нет, так как при  $x = 0$  функция не определена.

3) Исследуем функцию на наличие наклонных асимптот с помощью Excel. В диапазоне A5:A23 разместим значения независимой переменной от  $10^9$  до  $10^{10}$ , в диапазоне B5:B23 - соответствующие значения функции, в диапазоне C5:C23 вычислим значения коэффициента

$$a = \frac{f(x)}{x},$$

в диапазоне D5:D23 вычислим значения коэффициента

$$b = f(x) - ax.$$

|    | A  | B           | C  | D | E  | F       | G  | H | I | J |
|----|--|-------------|----|---|--|---------|----|---|---|---|
| 1  |  |             |    |   |  |         |    |   |   |   |
| 2  |  |             |    |   |  |         |    |   |   |   |
| 3  | Исследование на правостороннюю асимптоту |             |    |   | Исследование на правостороннюю асимптоту |         |    |   |   |   |
| 4  | x  | y           | a  | b | x  | y       | a  | b |   |   |
| 5  | 1000000000                               | -1000000000 | -1 | 0 | -1000000000                              | 1E+09   | -1 | 0 |   |   |
| 6  | 1500000000                               | -1500000000 | -1 | 0 | -1500000000                              | 1,5E+09 | -1 | 0 |   |   |
| 7  | 2000000000                               | -2000000000 | -1 | 0 | -2000000000                              | 2E+09   | -1 | 0 |   |   |
| 8  | 2500000000                               | -2500000000 | -1 | 0 | -2500000000                              | 2,5E+09 | -1 | 0 |   |   |
| 9  | 3000000000                               | -3000000000 | -1 | 0 | -3000000000                              | 3E+09   | -1 | 0 |   |   |
| 10 | 3500000000                               | -3500000000 | -1 | 0 | -3500000000                              | 3,5E+09 | -1 | 0 |   |   |
| 11 | 4000000000                               | -4000000000 | -1 | 0 | -4000000000                              | 4E+09   | -1 | 0 |   |   |
| 12 | 4500000000                               | -4500000000 | -1 | 0 | -4500000000                              | 4,5E+09 | -1 | 0 |   |   |
| 13 | 5000000000                               | -5000000000 | -1 | 0 | -5000000000                              | 5E+09   | -1 | 0 |   |   |
| 14 | 5500000000                               | -5500000000 | -1 | 0 | -5500000000                              | 5,5E+09 | -1 | 0 |   |   |
| 15 | 6000000000                               | -6000000000 | -1 | 0 | -6000000000                              | 6E+09   | -1 | 0 |   |   |
| 16 | 6500000000                               | -6500000000 | -1 | 0 | -6500000000                              | 6,5E+09 | -1 | 0 |   |   |
| 17 | 7000000000                               | -7000000000 | -1 | 0 | -7000000000                              | 7E+09   | -1 | 0 |   |   |
| 18 | 7500000000                               | -7500000000 | -1 | 0 | -7500000000                              | 7,5E+09 | -1 | 0 |   |   |
| 19 | 8000000000                               | -8000000000 | -1 | 0 | -8000000000                              | 8E+09   | -1 | 0 |   |   |
| 20 | 8500000000                               | -8500000000 | -1 | 0 | -8500000000                              | 8,5E+09 | -1 | 0 |   |   |
| 21 | 9000000000                               | -9000000000 | -1 | 0 | -9000000000                              | 9E+09   | -1 | 0 |   |   |
| 22 | 9500000000                               | -9500000000 | -1 | 0 | -9500000000                              | 9,5E+09 | -1 | 0 |   |   |
| 23 | 1E+10                                    | -1E+10      | -1 | 0 | -1E+10                                   | 1E+10   | -1 | 0 |   |   |
| 24 |  |             |    |   |  |         |    |   |   |   |

Как следует из расчетов,  $a = -1, b = 0$ . Таким образом, уравнение правой наклонной асимптоты  $y = -x$ . Аналогично получим уравнение левой наклонной асимптоты  $y = -x$ .

4) Вычислим первую производную функции:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(4 - x^3)'x^2 - (4 - x^3)(x^2)'}{x^4} = \frac{-3x^2x^2 - 2x(4 - x^3)}{x^4} \\ &= \frac{-3x^3 - 2(4 - x^3)}{x^3} = \\ &= \frac{-x^3 - 8}{x^3} \end{aligned}$$

Из последней формулы следует, что 1-я производная обращается в ноль в точке  $x = -2$ . С помощью Excel выясним имеется ли в этой точке экстремум функции.

Решение задачи на исследование функции скачано с  
[https://www.matburo.ru/ex\\_ma.php?p1=maissl](https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=maissl)  
 (еще больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

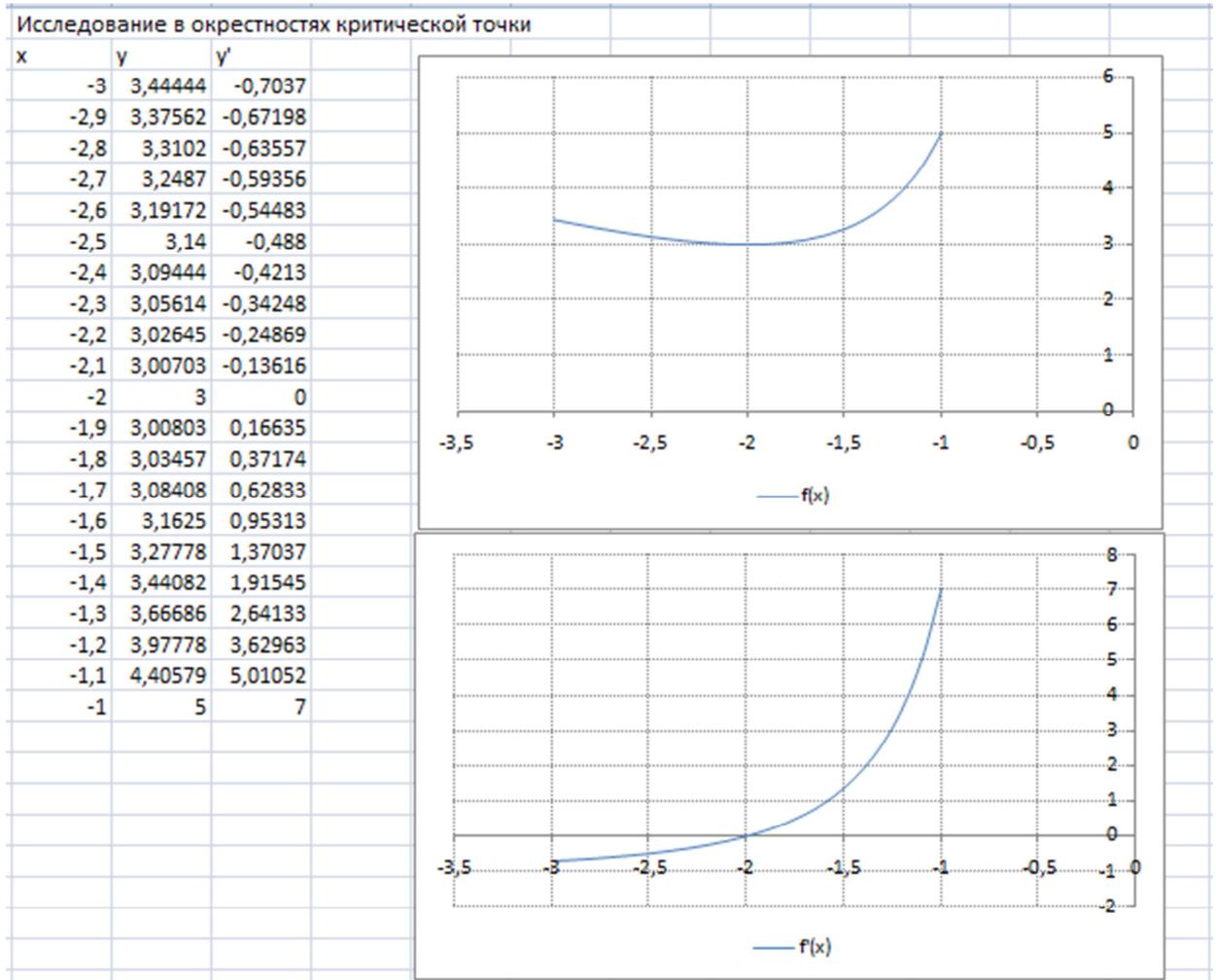


График функции в окрестностях критической точки:

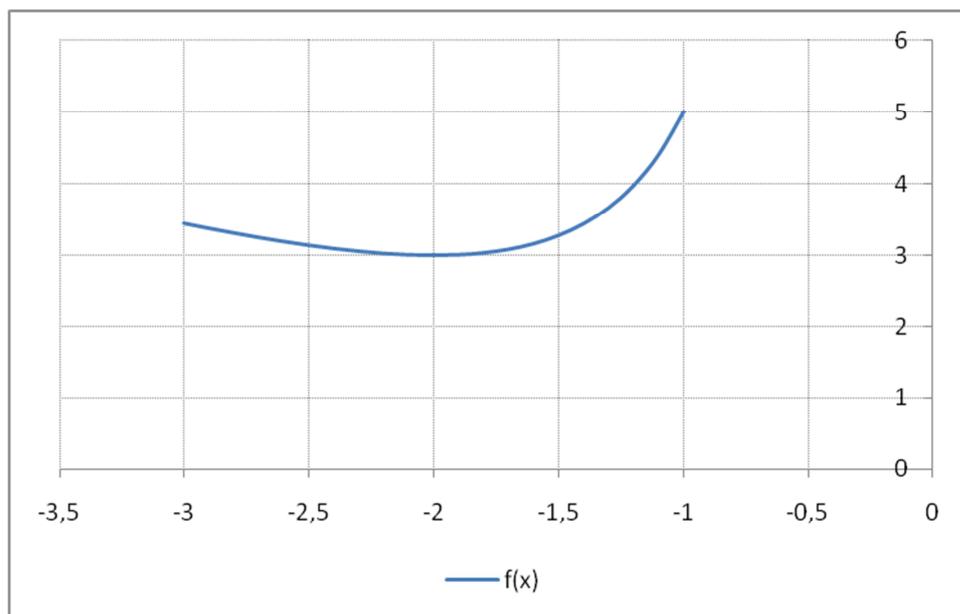
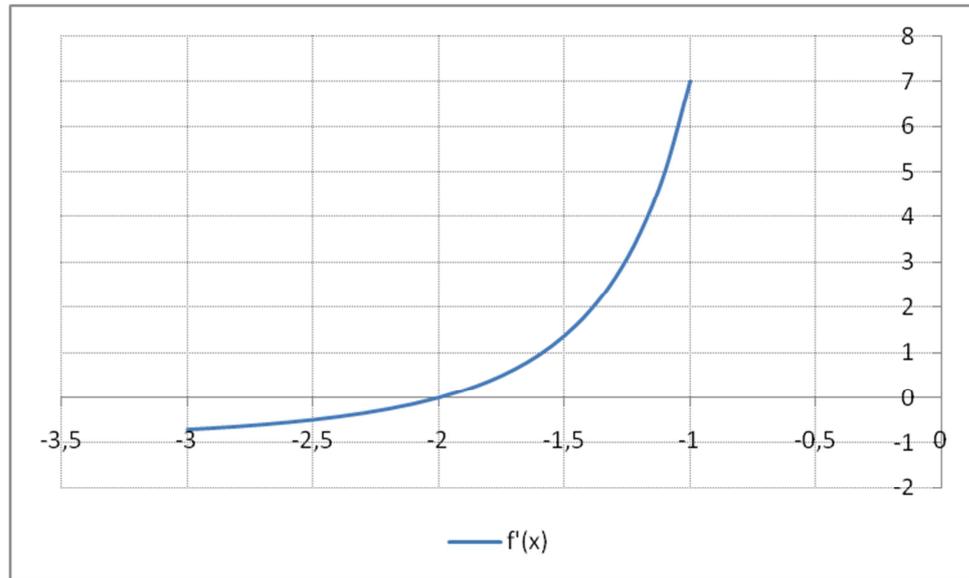


График первой производной функции в окрестностях критической точки:



Как видно из приведенных графиков, в точке  $x = -2$  функция достигает минимума  $f(-2) = 3$ .

5) Вычислим вторую производную функции:

$$y'' = \left( \frac{-x^3 - 8}{x^3} \right)' = (-1 - 8x^{-3})' = \frac{24}{x^4}$$

Очевидно, на всей области определения функции  $y'' > 0$ , функция вогнута. Точек перегиба нет.

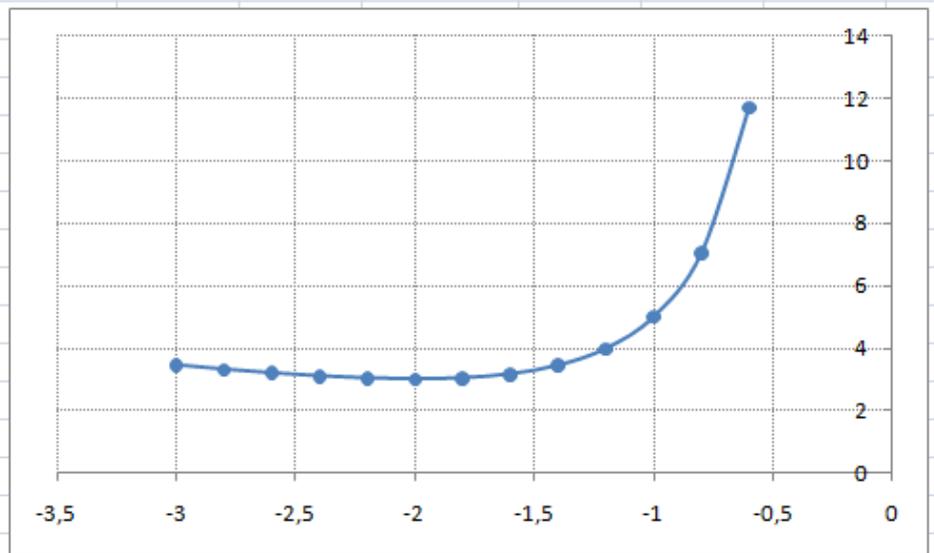
б) Очевидно, что график функции «разделен» на две части относительно вертикальной асимптоты  $x = 0$ . Построим графики «левой» и «правой» части функции, для  $x < 0$  и  $x > 0$  соответственно.

Решение задачи на исследование функции скачано с  
[https://www.matburo.ru/ex\\_ma.php?p1=maissl](https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=maissl)  
 (еще больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

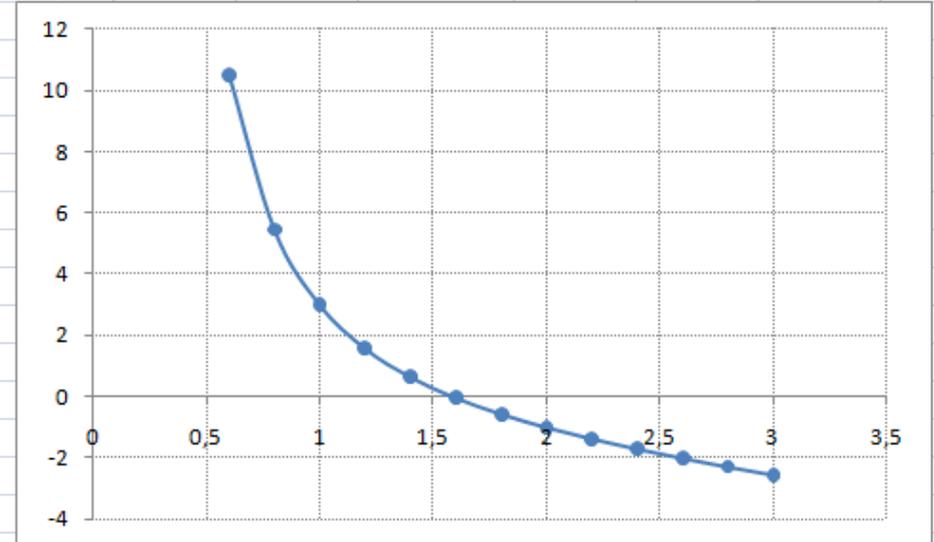
Построение левой части графика

|      |             |
|------|-------------|
| -3   | 3,444444444 |
| -2,8 | 3,310204082 |
| -2,6 | 3,191715976 |
| -2,4 | 3,094444444 |
| -2,2 | 3,026446281 |
| -2   | 3           |
| -1,8 | 3,034567901 |
| -1,6 | 3,1625      |
| -1,4 | 3,440816327 |
| -1,2 | 3,977777778 |
| -1   | 5           |
| -0,8 | 7,05        |
| -0,6 | 11,71111111 |

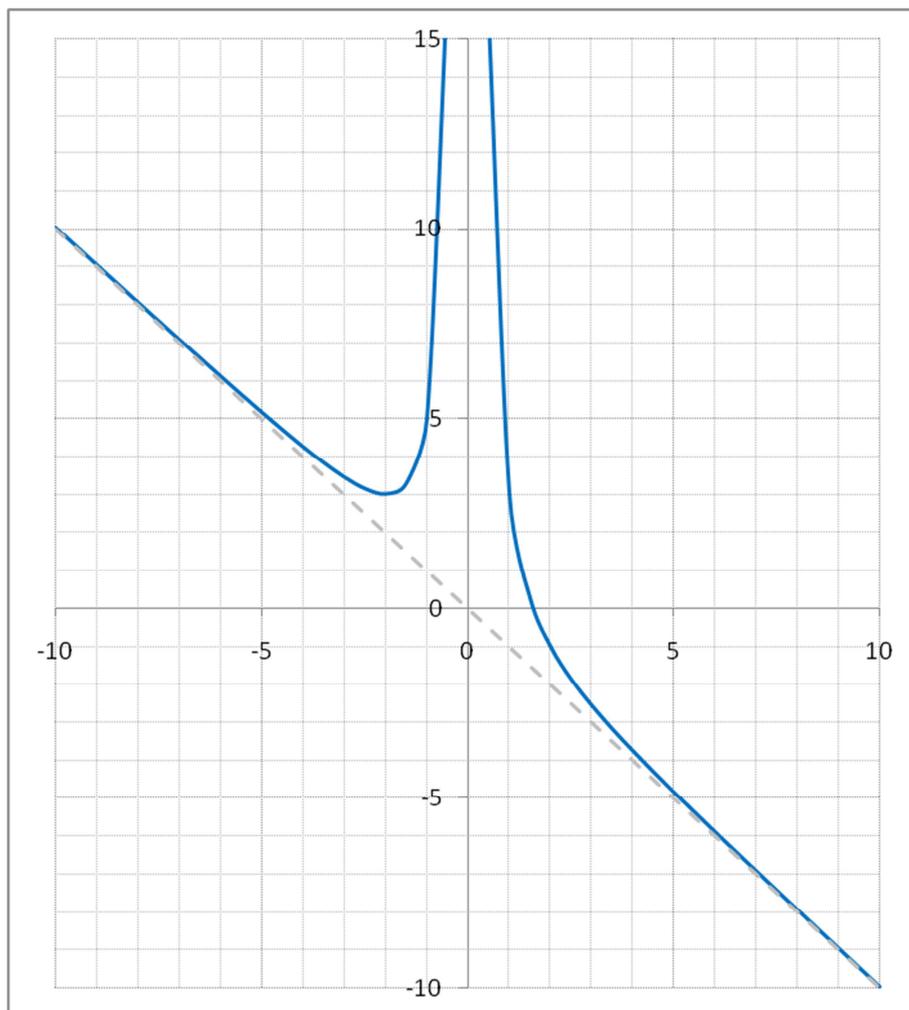


Построение правой части графика

|     |             |
|-----|-------------|
| 0,6 | 10,51111111 |
| 0,8 | 5,45        |
| 1   | 3           |
| 1,2 | 1,577777778 |
| 1,4 | 0,640816327 |
| 1,6 | -0,0375     |
| 1,8 | -0,5654321  |
| 2   | -1          |
| 2,2 | -1,37355372 |
| 2,4 | -1,70555556 |
| 2,6 | -2,00828402 |
| 2,8 | -2,28979592 |
| 3   | -2,55555556 |



7) Построим общий вид графика:



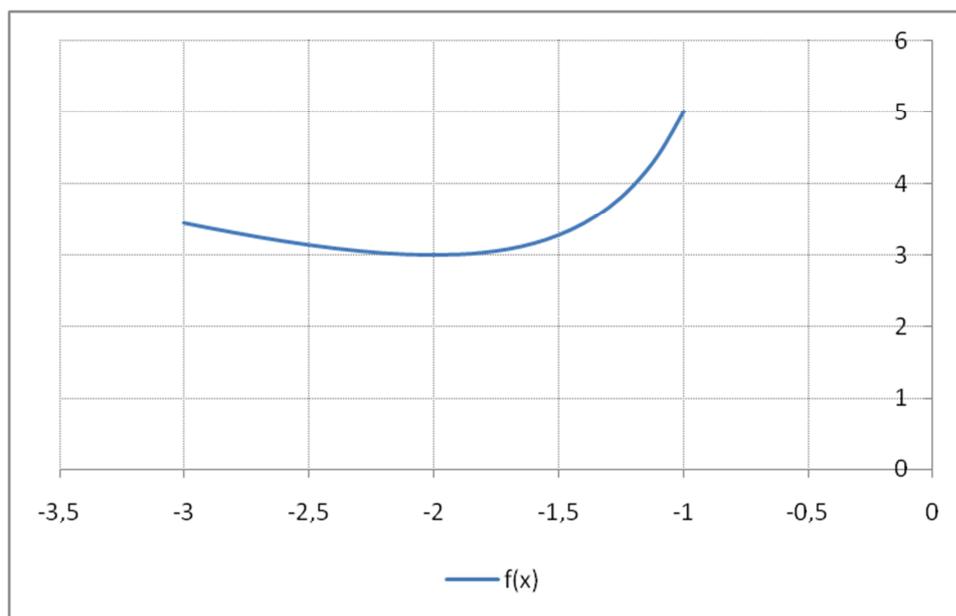
Найдем наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке  $[-3; -1]$ .

Используем Excel, получим таблицу значений функции на отрезке  $[-3; -1]$  и график функции на этом отрезке:

Решение задачи на исследование функции скачано с  
[https://www.matburo.ru/ex\\_ma.php?p1=maissl](https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=maissl)

(еще больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию



Отсюда видно, что

$$\min_{[-3;-1]} y = y(-2) = 3; \quad \max_{[-3;-1]} y = y(-1) = 5$$