Составление двойственной задачи линейного программирования

ЗАДАНИЕ. *Решить задачу линейного программирования; составить задачу, двойственную данной, и также найти ее решение:*

$z = x_1 + x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 4 \le 0, \\ 3x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 + x_2 - 4 \ge 0, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

РЕШЕНИЕ.

Данная задача содержит две переменных, поэтому ее можно решить графическим методом.

Построим область допустимых решений задачи, ограниченную неравенствами

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 4 \le 0, \\ 3x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 + x_2 - 4 \ge 0, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

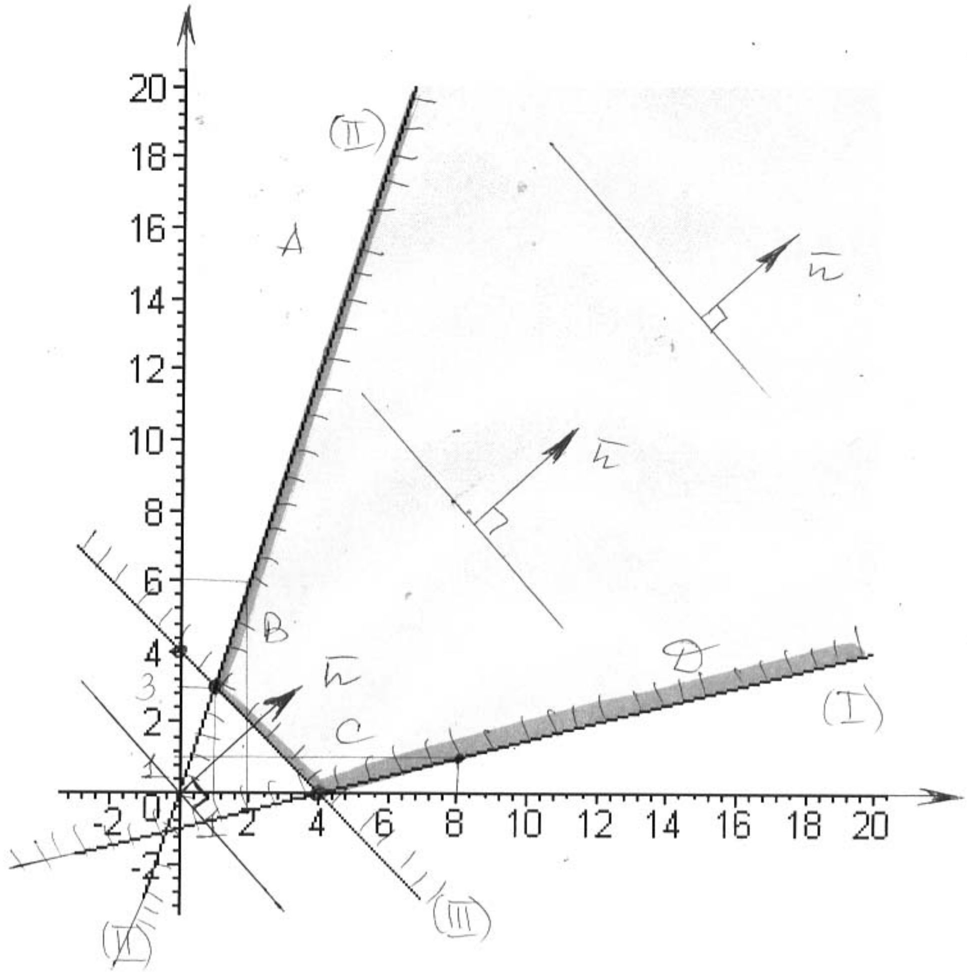
Строим прямые:

(I) $x_1 - 4x_2 = 4,$ точки (4, 0), (8,1).

(II) $3x_1 - x_2 = 0,$ точки (1,3), (2,6).

(III) $x_1 + x_2 = 4,$ точки (4,0), (0,4).

Получаем неограниченную выпуклую область $ABCD$ в первой четверти.



Ищем $z = x_1 + x_2 \to \max$.

Строим линию уровня целевой функции $x_1 + x_2 = 0$ и вектор градиента $\bar{n} = (1,1)$. Двигаем линию уровня параллельно себе по направлению градиента – направлению возрастания функции (см. рисунок), пока не достигнем крайней точки области. Видно, в направлении градиента область не ограничена, функция не достигает максимума, стремится к бесконечности при данных ограничениях.

Прямая задача не имеет решения.

Составим задачу, двойственную данной:

$$z = x_1 + x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 4 \le 0, \\ 3x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 + x_2 - 4 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Для этого запишем задачу в стандартном виде:

$$z = x_1 + x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \le 4, \\ -3x_1 + x_2 \le 0, \\ -x_1 - x_2 \le -4, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Так как исходная задача была на максимум, двойственная задача будет на минимум, причем коэффициенты при переменных соответствуют правым частям ограничений, число переменных равно числу ограничений и равно трем:

$$f = 4y_1 + 0y_2 - 4y_3 = 4y_1 - 4y_3 \to \min .$$

Строим ограничения, транспонируя матрицу коэффициентов в ограничениях. Так как все переменные были неотрицательны, все ограничения ограничение будут иметь знаки $\ge$. Все ограничения имеют знак $\le$, соответствующие двойственные переменные неотрицательны. Правые части ограничений – это коэффициенты при переменных в исходной целевой функции.

Получаем двойственную задачу:

$$f = 4y_1 - 4y_3 \to \min ,$$
$$\begin{cases} y_1 - 3y_2 - y_3 \ge 1, \\ -4y_1 + y_2 - y_3 \ge 1, \end{cases}$$
$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0.$$

Используем теорему:
Если в одной задаче из пары двойственных задач целевая функция неограниченна, то во второй задаче допустимая область пуста.

Так как в первой задаче целевая функция неограниченна, то двойственная задача не имеет решения.