Тема: Операционное исчисление

ЗАДАНИЕ. *Методом операционного исчисления найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданным начальным условиям.*

$$\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = x + y; \end{cases}$$

$x(0) = 2,\ y(0) = 1.$

РЕШЕНИЕ:

Перейдем к изображениям:

$x(t) \Leftrightarrow X(p)$,

$x'(t) \Leftrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - 2$,

$y(t) \Leftrightarrow Y(p)$,

$y'(t) \Leftrightarrow pY(p) - y(0) = pY(p) - 1$.

Получаем систему:

$$\begin{cases} pX(p) - 2 = X(p) - Y(p), \\ pY(p) - 1 = X(p) + Y(p); \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(p)(p-1) + Y(p) = 2, \\ -X(p) + Y(p)(p-1) = 1; \end{cases}$$

Найдем решение системы по формулам Крамера.
Основной определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-1 & 1 \\ -1 & p-1 \end{vmatrix} = (p-1)^2 + 1 = p^2 - 2p + 2.$$

Дополнительные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & p-1 \end{vmatrix} = 2p - 2 - 1 = 2p - 3,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p-1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = p - 1 + 2 = p + 1.$$

Получаем:

$$X(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2p-3}{p^2-2p+2},\ Y(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{p+1}{p^2-2p+2}.$$

Возвращаемся к оригиналам:

$$X(p) = \frac{2p-3}{p^2-2p+2} = 2\frac{p-3/2}{(p-1)^2+1} = 2\frac{p-1+1-3/2}{(p-1)^2+1} = 2\frac{p-1}{(p-1)^2+1} - \frac{1}{(p-1)^2+1} \Leftrightarrow,$$

$$\Leftrightarrow 2e^t\cos t - e^t \sin t = x(t).$$

$$Y(p) = \frac{p+1}{p^2-2p+2} = \frac{p-1+2}{(p-1)^2+1} = \frac{p-1}{(p-1)^2+1} + 2\frac{1}{(p-1)^2+1} \Leftrightarrow e^t\cos t + 2e^t \sin t = y(t).$$

Получили решение:

$$\begin{cases} x(t) = 2e^t \cos t - e^t \sin t, \\ y(t) = e^t \cos t + 2e^t \sin t. \end{cases}$$