Задача скачана с сайта www.MatBuro.ru
Еще примеры: https://www.matburo.ru/ex_ag.php?p1=aglin
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике

Базис пространства. Разложение по базису

Пример решения задачи по алгебре

Задача. *Даны векторы* e_1, e_2, e_3, e_4 *и* a *в стандартном базисе пространства* R^4.

Требуется:

а) убедиться, что векторы e_1, e_2, e_3 *и* e_4 *образуют базис пространства* R^4*;*

б) найти разложение вектора a *по этому базису;*

в) найти угол между векторами e_1 и e_2 .

$$e_1 = (1,0,-2,3);\; e_2 = (0,1,3,2);\; e_3 = (1,0,0,1);\; e_4 = (2,3,12,2);\; a = (9,12,5,8)$$

Решение.

а) Векторы e_1, e_2, e_3, e_4 образуют базис пространства R^4, если их линейная комбинация $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 = 0$ только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

Уравнению $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 = 0$ соответствует система уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 \quad + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0, \\ \qquad \alpha_2 + 3\alpha_4 = 0, \\ -2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 12\alpha_4 = 0, \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Вычислим определитель, разложив его по элементам третьего столбца:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 12 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 12 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 12 \end{vmatrix} =$$

$$= 0\cdot 3\cdot 2 + 1\cdot 12\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot 3 - 3\cdot 3\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot 2 - 0\cdot 2\cdot 12 - (1\cdot 1\cdot 12 - 2\cdot 0\cdot 3 + 0\cdot 2\cdot 3 +$$
$$+ 2\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot 3\cdot 3 - 0\cdot 0\cdot 12) = 36 - 12 - 27 + 4 - 12 - 4 + 9 = -6 \neq 0$$

Следовательно, заданные векторы e_1, e_2, e_3, e_4 образуют базис пространства R^4.

б) Найдем координаты вектора $a = (a_1; a_2; a_3; a_4)$ в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 из векторного уравнения $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 = a$.

Этому векторному уравнению соответствует система

$$\begin{cases} \alpha_1 \quad + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 9, \\ \qquad \alpha_2 + 3\alpha_4 = 12, \\ -2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 12\alpha_4 = 5, \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 8. \end{cases}$$

Задача скачана с сайта www.MatBuro.ru
Еще примеры: https://www.matburo.ru/ex_ag.php?p1=aglin
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике

Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 12 \\ -2 & 3 & 0 & 12 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right) \to$$

(первую строку умножим на 2, сложим с 3-ей; умножим на -3 , сложим с 4-ой)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 12 \\ 0 & 3 & 2 & 16 & 23 \\ 0 & 2 & -2 & -4 & -19 \end{array}\right) \to$$

(первую строку умножим на -3, сложим с 3-ей; умножим на -2 , сложим с 4-ой)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -13 \\ 0 & 0 & -2 & -10 & -43 \end{array}\right) \to$$

(сложим 3 и 4 строки)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -56 \end{array}\right) \to \begin{cases} \alpha_1 \quad + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 9, \\ \quad \alpha_2 + 3\alpha_4 = 12, \\ 2\alpha_3 + 7\alpha_4 = -13, \\ -3\alpha_4 = -56. \end{cases}$$

Решив систему, находим $\alpha_4 = \dfrac{56}{3}$; $\alpha_3 = -\dfrac{431}{6}$; $\alpha_2 = -44$; $\alpha_1 = \dfrac{87}{2}$

Следовательно, разложение вектора a по базису $e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4$:

$$a = \frac{87}{2} e_1 - 44 e_2 - \frac{431}{6} e_3 + \frac{56}{3} e_4$$

в) $\cos\varphi = \dfrac{e_1 \cdot e_2}{|e_1| \cdot |e_2|} = \dfrac{1\cdot 0 + 0\cdot 1 - 2\cdot 3 + 3\cdot 2}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-2)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + 3^2 + 2^2}} = 0$.

Следовательно, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, то есть векторы e_1 и e_2 ортогональны.

Ответ. а) векторы $e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4$ образуют базис пространства R^4; б) $a = \dfrac{87}{2} e_1 - 44 e_2 - \dfrac{431}{6} e_3 + \dfrac{56}{3} e_4$; в) $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$