ФСР системы линейных уравнений

Пример решения задачи по алгебре

Задача. *Найти фундаментальную систему решений и записать структуру общего* решения:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 12x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Записываем матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приводим ее к редуцированному виду (в максимальном числе столбцов окажется по одной единице (в разных строках у разных столбцов), остальные элементы столбцов – нули).
Матрица системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 12 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Вычитаем из второй строки первую, умноженную на 3. Вычитаем из третьей строки первую, умноженную на 2. Получаем.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычитаем из первой строки вторую, затем делим вторую на 3.

$$A_{ред} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -10/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Первый и третий столбцы – базисные. Так как количество базисных столбцов равно двум, ранг матрицы A тоже равен двум, а размерность пространства решений равна 4-2=2, то есть фундаментальная система решений состоит из двух линейно независимых решений.

Неизвестные x_1 и x_3 объявляем базисными, неизвестные x_2 и x_4 - свободными. Запишем систему уравнений с редуцированной матрицей, перенесем свободные переменные в правую часть. Получим:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 14x_4, \\ \quad x_3 = 10/3x_4. \end{cases}$$

Рассматриваем первый набор свободных неизвестных $x_2 = 1$ и $x_4 = 0$, получаем первое решение

$$X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Рассматриваем второй набор свободных неизвестных $x_2 = 0$ и $x_4 = 1$, получаем первое решение

$$X_2 = \begin{pmatrix} -14 \\ 0 \\ 10/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Решения X_1, X_2 образуют фундаментальную систему решений, вид общего решения следующий:

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -14 \\ 0 \\ 10/3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где C_1, C_2 - произвольные постоянные.