

Решение задачи по математической логике

Исчисление высказываний

Даны высказывания:

- 1) То, что N делится на 15, есть необходимое условие того, чтобы N делилось на 3.
- 2) То, что N не делится на 3, влечёт то, что N не делится на 15.
- 3) N делится на 3 при условии, что N делится на 15.
- 4) N не делится на 3 только тогда, когда N не делится на 15.
- 5) N делится на 3 тогда и только тогда, когда N делится на 15.

Какие из них следуют из высказывания

- 6) Если N делится на 15, то N делится на 3.

Решение.

Пусть высказывание A означает « N делится на 3», а высказывание B означает « N делится на 15».

Тогда высказывание 6) «Если N делится на 15, то N делится на 3» записывается в виде $B \rightarrow A$.

Запишем высказывания 1) – 5).

Суждение B является необходимым условием суждения A , когда из истинности A следует истинность B . То есть, если B ложно, то заведомо ложно и A , т.е. $A \rightarrow B$.

- 1) $A \rightarrow B$;
- 2) $\bar{A} \rightarrow \bar{B}$;
- 3) $B \rightarrow A$;
- 4) $\bar{A} \rightarrow \bar{B}$;
- 5) $A \leftrightarrow B$.

1) Проверяем формулу $(B \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow B)$:

$$\begin{aligned}(B \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow B) &= (\bar{B} \vee A) \rightarrow (\bar{A} \vee B) = \\ &= \overline{(\bar{B} \vee A)} \vee (\bar{A} \vee B) = (\bar{\bar{B}} \& \bar{A}) \vee (\bar{A} \vee B) = \\ &= (B \& \bar{A}) \vee (\bar{A} \vee B) = \\ &= (B \vee \bar{A} \vee B) \& (\bar{A} \vee \bar{A} \vee B) = \\ &= (\bar{A} \vee B) \& (\bar{A} \vee B) = \bar{A} \vee B\end{aligned}$$

Эта формула не является тождественно истинной, т.к. при $A=1$ и $B=0$ она принимает значение 0.

Следовательно, высказывание 1) «То, что N делится на 15, есть необходимое условие того, чтобы N делилось на 3» не следует из высказывания б) «Если N делится на 15, то N делится на 3».

2) Формула $(B \rightarrow A) \rightarrow (\bar{A} \rightarrow \bar{B})$ уже проверялась в пункте 1):

Эта формула тождественно истинная.

Следовательно, высказывание 2) «То, что N не делится на 3 влечёт то, что N не делится на 15» следует из высказывания б) «Если N делится на 15, то N делится на 3».

3) Формула $(B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow A)$ является тавтологией.

Следовательно, высказывание 3) «N делится на 3 при условии, что N делится на 15» следует из высказывания б) «Если N делится на 15, то N делится на 3».

4) Проверяем импликацию $(B \rightarrow A) \rightarrow (\bar{A} \rightarrow \bar{B})$:

$$\begin{aligned} (B \rightarrow A) \rightarrow (\bar{A} \rightarrow \bar{B}) &= (\bar{B} \vee A) \rightarrow (\bar{\bar{A}} \vee \bar{B}) = \\ &= \overline{(\bar{B} \vee A)} \vee (A \vee \bar{B}) = (\bar{\bar{B}} \& \bar{A}) \vee (A \vee \bar{B}) = \\ &= (B \& \bar{A}) \vee (A \vee \bar{B}) = (B \vee A \vee \bar{B}) \& (\bar{A} \vee A \vee \bar{B}) = \\ &= 1 \& 1 = 1 \end{aligned}$$

Эта формула тождественно истинная.

Следовательно, высказывание 4) «N не делится на 3 только тогда, когда N не делится на 15» следует из высказывания б) «Если N делится на 15, то N делится на 3».

5) Проверяем формулу $(B \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow B)$.

$$\begin{aligned} (B \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow B) &= (\bar{B} \vee A) \rightarrow ((A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)) = \\ &= (\bar{B} \vee A) \rightarrow ((\bar{A} \vee B) \& (\bar{B} \vee A)) = \\ &= (\bar{B} \vee A) \rightarrow ((\bar{A} \& \bar{B}) \vee (\bar{A} \& A) \vee (B \& \bar{B}) \vee (B \& A)) = \\ &= (\bar{B} \vee A) \rightarrow ((\bar{A} \& \bar{B}) \vee 0 \vee 0 \vee (B \& A)) = \\ &= \overline{(\bar{B} \vee A)} \vee (\bar{A} \& \bar{B}) \vee (B \& A) = \\ &= (\bar{\bar{B}} \& \bar{A}) \vee (\bar{A} \& \bar{B}) \vee (B \& A) = \\ &= (\bar{A} \& B) \vee (\bar{A} \& \bar{B}) \vee (A \& B) \end{aligned}$$

Полученное выражение не является тождественно истинным, т.к. при $A=1$ и $B=0$ оно равно 0:

$$(\bar{A} \& B) \vee (\bar{A} \& \bar{B}) \vee (A \& B) = (0 \& 0) \vee (0 \& 1) \vee (1 \& 0) = 0 \vee 0 \vee 0 = 0$$

Следовательно, высказывание 5) «N делится на 3 тогда и только тогда, когда N делится на 15» не следует из высказывания б) «Если N делится на 15, то N делится на 3».

Задача скачана с сайта www.MatBuro.ru

Еще примеры: https://www.matburo.ru/ex_subject.php?p=dm

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике

Вывод. Из высказывания «Если N делится на 15, то N делится на 3» следуют высказывания

- 2) «То, что N не делится на 3, влечёт то, что N не делится на 15»;
- 3) « N делится на 3 при условии, что N делится на 15»;
- 4) « N не делится на 3 только тогда, когда N не делится на 15».