

## Тема: Булевы функции

ЗАДАНИЕ. Доказать полноту (или неполноту) приведенной системы булевых функций  
 $f_1 = x_1 \wedge x_2, f_2 = 0, f_3 = x_1 \sim x_2$

РЕШЕНИЕ. Воспользуемся

Теоремой Поста (о полноте). Для того чтобы система булевых функций была полна необходимо и достаточно, чтобы она содержала функцию, не сохраняющую 0, функцию, не сохраняющую 1, несамодвойственную функцию, немонотонную функцию, нелинейную функцию.

Составим таблицу истинности функций.

$x_1$	$x_2$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
0	0	0	0	1
0	1	0	0	0
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

Функция  $f_3$  не сохраняет 0 (так как  $f_3(0,0) = 1$ )

Функция  $f_2$  не сохраняет 1 (так как  $f_2(1,1) = 0$ )

Функция  $f_1$  несамодвойственна (так как  $0 = f_1(0,1) \neq \overline{f_1(1,0)} = 1$ )

Функция  $f_3$  немонотонна (так как для упорядоченных наборов  $(0,0) < (0,1)$  она принимает значения  $f_3(0,0) = 1 > 0 = f_3(0,1)$ ).

Функция  $f_1$  нелинейна. Покажем это. Пусть  $f_1 = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2$

$$\left. \begin{aligned} f_1(0,0) &= a_0 \oplus 0 \oplus 0 = 0 \Rightarrow a_0 = 0 \\ f_1(0,1) &= 0 \oplus 0 \oplus a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0 \\ f_1(1,0) &= 0 \oplus a_1 \oplus 0 = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \end{aligned} \right| \Rightarrow f \equiv 0, \text{ что неверно}$$

Таким образом, по теореме Поста система  $\{f_1, f_2, f_3\}$  полна, так как включает в себя функцию, не сохраняющую 0, функцию, не сохраняющую 1, несамодвойственную функцию, нелинейную функцию, немонотонную функцию.