

Пример решения задачи. Булевы функции. Полнота.

Задача. Даны функции f (таблица 2) и w (таблица 3).

а) Вычислить таблицу значений функции f .

б) Найти минимальные ДНФ функций f и w .

в) Выяснить полноту системы $\{f, w\}$. Если система не полна, дополнить систему функцией g до полной системы.

г) Из функциональных элементов, реализующих функции полной системы $\{f, w\}$ или $\{f, w, g\}$, построить функциональные элементы, реализующие базовые функции $(\vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$.

$$f(x_1, x_2, x_3) = ((x_3 \Rightarrow (x_1 \sim x_2)) \oplus (\bar{x}_3 \Rightarrow \bar{x}_1)) \Rightarrow (\bar{x}_2 | \bar{x}_3);$$

$$w = (0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1).$$

Решение:

а) Таблица значений функции f :

x_1	x_2	x_3	\bar{x}_1	\bar{x}_2	\bar{x}_3	$x_1 \sim x_2$	$x_3 \Rightarrow (x_1 \sim x_2)$	$\bar{x}_3 \Rightarrow \bar{x}_1$	$((x_3 \Rightarrow (x_1 \sim x_2)) \oplus (\bar{x}_3 \Rightarrow \bar{x}_1))$	$\bar{x}_2 \bar{x}_3$	f
0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1

б) Карта Карно функции f :

Задача скачана с сайта www.MatBuro.ru

Еще примеры: https://www.matburo.ru/ex_subject.php?p=dm

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике

x_1x_2	00	01	11	10
x_3				
0	1	1	1	
1	1	1	1	1

Минимальная ДНФ: $f = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3$

Карта Карно для функции w

$x_1x_2x_3$	w
000	0
001	1
010	1
011	0
100	0
101	1
110	0
111	1

x_1x_2	00	01	11	10
x_3				
0		1		
1	1		1	1

Минимальная ДНФ: $w = x_1x_3 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3$.

в) Проверка на полноту системы $\{f, w\}$.

$x_1x_2x_3$	f	w
000	1	0
001	1	1
010	1	1
011	1	0
100	0	0
101	1	1
110	1	0
111	1	1

1. Сохранение 0.

$$f(0,0,0) = 1 \Rightarrow f \notin T_0;$$

$$w(0,0,0) = 0 \Rightarrow w \in T_0.$$

2. Сохранение 1.

$$f(1,1,1) = 1 \Rightarrow f \in T_1;$$

$$w(1,1,1) = 1 \Rightarrow w \in T_1.$$

3. Самодвойственность.

$$f(0,0,0) = f(1,1,1) = 1 \Rightarrow f \notin S;$$

$$w(0,1,0) = w(1,0,1) = 1 \Rightarrow w \notin S.$$

4. Монотонность.

$$\text{Т.к. } (0,0,0) < (1,0,0), \text{ но } f(0,0,0) > f(1,0,0) \Rightarrow f \notin M.$$

$$\text{Т.к. } (0,0,1) < (0,1,1), \text{ но } w(0,0,1) > w(0,1,1) \Rightarrow w \notin M.$$

5. Линейность функций.

Общий вид полинома Жегалкина для функции трёх переменных:

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{123}x_1x_2x_3 \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus a_{23}x_2x_3 \oplus a_{13}x_1x_3 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_0$$

x_1	x_2	x_3	f (x_1, x_2, x_3)	
0	0	0	1	$a_0 = 1$
0	0	1	1	$a_0 + a_3 = 1 \Rightarrow 1 + a_3 = 1 \Rightarrow a_3 = 0$
0	1	0	1	$a_2 + a_0 = 1 \Rightarrow a_2 + 1 = 1 \Rightarrow a_2 = 0$
0	1	1	1	$a_{23} + a_2 + a_3 + a_0 = 1 \Rightarrow a_{23} + 0 + 0 + 1 = 1 \Rightarrow a_{23} = 0$
1	0	0	0	$a_1 + a_0 = 0 \Rightarrow a_1 + 1 = 0 \Rightarrow a_1 = 1$
1	0	1	1	$a_{13} + a_1 + a_3 + a_0 = 1 \Rightarrow a_{13} + 1 + 0 + 1 = 1 \Rightarrow a_{13} = 1$
1	1	0	1	$a_{12} + a_1 + a_2 + a_0 = 1 \Rightarrow a_{12} + 1 + 0 + 1 = 1 \Rightarrow a_{12} = 1$
1	1	1	1	$a_{123} + a_{12} + a_{23} + a_{13} + a_1 + a_2 + a_3 + a_0 = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow a_{123} + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 1 = 1 \Rightarrow a_{123} = 1$

Полином Жегалкина функции f :

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1 + 1.$$

Так как полином функции f содержит конъюнкции, то $f \notin L$.

$$w(x_1, x_2, x_3) = a_{123}x_1x_2x_3 \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus a_{23}x_2x_3 \oplus a_{13}x_1x_3 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_0$$

x_1	x_2	x_3	w (x_1, x_2, x_3)	
0	0	0	0	$a_0 = 0$
0	0	1	1	$a_0 + a_3 = 1 \Rightarrow 0 + a_3 = 1 \Rightarrow a_3 = 1$
0	1	0	1	$a_2 + a_0 = 1 \Rightarrow a_2 + 0 = 1 \Rightarrow a_2 = 1$
0	1	1	0	$a_{23} + a_2 + a_3 + a_0 = 0 \Rightarrow a_{23} + 1 + 1 + 0 = 0 \Rightarrow a_{23} = 0$
1	0	0	0	$a_1 + a_0 = 0 \Rightarrow a_1 + 0 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$
1	0	1	1	$a_{13} + a_1 + a_3 + a_0 = 1 \Rightarrow a_{13} + 0 + 1 + 0 = 1 \Rightarrow a_{13} = 0$
1	1	0	0	$a_{12} + a_1 + a_2 + a_0 = 0 \Rightarrow a_{12} + 0 + 1 + 0 = 0 \Rightarrow a_{12} = 1$
1	1	1	1	$a_{123} + a_{12} + a_{23} + a_{13} + a_1 + a_2 + a_3 + a_0 = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow a_{123} + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 = 1 \Rightarrow a_{123} = 0$

$$w(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2 + x_3$$

Функция w не является линейной, т.е. $w \notin L$.

Критериальная таблица:

	T_0	T_1	S	M	L
f	-	+	-	-	-
w	+	+	-	-	-

г) Система $\{f, w\}$ не является функционально полным классом, т.к. обе функции сохраняют константу 1. Дополним систему функцией, которая не сохраняет 1, например, функцией $g(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0)$. Функция g не сохраняет 0, не сохраняет 1, является самодвойственной, но не является

МОНОТОННОЙ.

$$g(x_1, x_2, x_3) = a_{123}x_1x_2x_3 \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus a_{23}x_2x_3 \oplus a_{13}x_1x_3 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_0$$

x_1	x_2	x_3	$g(x_1, x_2, x_3)$	
0	0	0	1	$a_0 = 1$
0	0	1	0	$a_0 + a_3 = 0 \Rightarrow 1 + a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = 1$
0	1	0	0	$a_2 + a_0 = 0 \Rightarrow a_2 + 1 = 0 \Rightarrow a_2 = 1$
0	1	1	0	$a_{23} + a_2 + a_3 + a_0 = 0 \Rightarrow a_{23} + 1 + 1 + 1 = 0 \Rightarrow a_{23} = 1$
1	0	0	1	$a_1 + a_0 = 1 \Rightarrow a_1 + 1 = 1 \Rightarrow a_1 = 0$
1	0	1	1	$a_{13} + a_1 + a_3 + a_0 = 1 \Rightarrow a_{13} + 0 + 1 + 1 = 1 \Rightarrow a_{13} = 1$
1	1	0	1	$a_{12} + a_1 + a_2 + a_0 = 1 \Rightarrow a_{12} + 0 + 1 + 1 = 1 \Rightarrow a_{12} = 1$
1	1	1	0	$a_{123} + a_{12} + a_{23} + a_{13} + a_1 + a_2 + a_3 + a_0 = 0 \Rightarrow a_{123} + 1 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 1 = 0 \Rightarrow a_{123} = 0$

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_2 + x_3 + 1.$$

Функция g не является линейной, т.е. $g \notin L$.

Критериальная таблица:

	T_0	T_1	S	M	L
f	-	+	-	-	-
w	+	+	-	-	-
g	-	-	+	-	-

Система $\{f, w, g\}$ является функционально полным классом. Значит, из этих функций с помощью суперпозиций можно выразить константы 0, 1, отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию.

1. Отрицание.

$g \notin T_0$ и $g \notin T_1 \Rightarrow$ отрицание строим из функции g , т.к. $g(0, 0, 0) = 1$ и $g(1, 1, 1) = 0$.

$$g(x, x, x) = \bar{x}.$$

2. Константа 1.

$f \notin T_0$ и $f \in T_1 \Rightarrow$ константу 1 строим из функции f .

$f(0,0,0) = f(1,1,1) = 1$. Следовательно, $f(x, x, x) \equiv 1$.

3. Константа 0.

Для построения константы 0 возьмём отрицание от функции $f(x, x, x)$.

$$\overline{f(x, x, x)} = g(f(x, x, x), f(x, x, x), f(x, x, x)) \equiv 0.$$

Проверка:

$$g(f(0,0,0), f(0,0,0), f(0,0,0)) = g(1,1,1) = 0;$$

$$g(f(1,1,1), f(1,1,1), f(1,1,1)) = g(1,1,1) = 0.$$

4. Для построения дизъюнкции из функции $f = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3$ зафиксируем переменную $x_1 = 1$, и обозначим $x_2 \rightarrow x$, $x_3 \rightarrow y$.

$$\text{Тогда } f(1, x, y) = \bar{1} \vee x \vee y = 0 \vee x \vee y = x \vee y.$$

$$\text{Выражение для дизъюнкции: } d(x, y) = f(1, x, y) = f(f(x, x, x), x, y) = x \vee y$$

Проверка:

$$d(0,0) = f(f(0,0,0), 0, 0) = f(1, 0, 0) = 0;$$

$$d(0,1) = f(f(0,0,0), 0, 1) = f(1, 0, 1) = 1;$$

$$d(1,0) = f(f(1,1,1), 1, 0) = f(1, 1, 0) = 1;$$

$$d(1,1) = f(f(1,1,1), 1, 1) = f(1, 1, 1) = 1.$$

5. Для построения конъюнкции из функции $w = x_1 x_3 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$ зафиксируем переменную $x_3 = 0$, и обозначим $\bar{x}_1 \rightarrow x$, $x_2 \rightarrow y$.

$$\text{Тогда } w(x_1, x_2, 0) = x_1 x_3 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 = x_1 \cdot 0 \vee \bar{x}_2 \cdot 0 \vee \bar{x}_1 x_2 \cdot 1 = \bar{x}_1 x_2 = xy.$$

Выражение для конъюнкции:

$$k(x, y) = w(\bar{x}, y, 0) = w(g(x, x, x), y, g(f(x, x, x), f(x, x, x), f(x, x, x))) = xy.$$

Проверка:

Задача скачана с сайта www.MatBuro.ru

Еще примеры: https://www.matburo.ru/ex_subject.php?p=dm

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике

$$k(0,0)=w(g(0,0,0),0,g(f(0,0,0),f(0,0,0),f(0,0,0)))=w(1,0,g(1,1,1))=w(1,0,0)=0;$$

$$k(0,1)=w(g(0,0,0),1,g(f(0,0,0),f(0,0,0),f(0,0,0)))=w(1,1,g(1,1,1))=w(1,1,0)=0;$$

$$k(1,0)=w(g(1,1,1),0,g(f(1,1,1),f(1,1,1),f(1,1,1)))=w(0,0,g(1,1,1))=w(0,0,0)=0;$$

$$k(1,1)=w(g(1,1,1),1,g(f(1,1,1),f(1,1,1),f(1,1,1)))=w(0,1,g(1,1,1))=w(0,1,0)=1.$$