Задача скачана с сайта www.MatBuro.ru
Еще примеры: https://www.matburo.ru/ex_dm.php?p1=dmmmi
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике

Метод математической индукции

Пример решения задачи на доказательство равенства

Задание. *Доказать методом математической индукции:*

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$$

Решение.

Для решения задания воспользуемся методом математической индукции. Пусть $n = 1$. Тогда исходное равенство примет вид:

$$1^2=\frac{1(4\cdot 1^2-1)}{3}\Rightarrow 1=1$$

Очевидно, при $n = 1$ исходное равенство является верным.

Предположим, что для произвольного натурального числа k $(k > 1)$ исходное равенство выполняется, то есть, $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2k-1)^2=\frac{k(4k^2-1)}{3}$

Покажем, что в этом случае равенство выполняется и для числа $k + 1$. То есть, докажем равенство

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2k-1)^2+(2k+1)^2=\frac{(k+1)(4(k+1)^2-1)}{3}$$

Преобразуем левую часть равенства, учитывая, что $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2k-1)^2=\frac{k(4k^2-1)}{3}$

Имеем:

Задача скачана с сайта www.MatBuro.ru
Еще примеры: https://www.matburo.ru/ex_dm.php?p1=dmmmi
©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике

$$1^2+3^2+5^2+...+(2k-1)^2+(2k+1)^2=\frac{k(4k^2-1)}{3}+(2k+1)^2=\frac{k(4k^2-1)+3(2k+1)^2}{3}=$$

$$=\frac{4k^3-k+3\left(4k^2+4k+1\right)}{3}=\frac{4k^3-k+12k^2+12k+3}{3}=\frac{4k^3+12k^2+11k+3}{3}=$$

$$=\frac{4k^3+4k^2+8k^2+8k+3k+3}{3}=\frac{4k^2\left(k+1\right)+8k\left(k+1\right)+3\left(k+1\right)}{3}=\frac{\left(k+1\right)\left(4k^2+8k+3\right)}{3}=$$

$$=\frac{\left(k+1\right)\left(4\left(k^2+2k+1\right)-1\right)}{3}=\frac{\left(k+1\right)\left(4\left(k+1\right)^2-1\right)}{3}$$

Таким образом, равенство

$$1^2+3^2+5^2+...+(2k-1)^2+(2k+1)^2=\frac{\left(k+1\right)(4\left(k+1\right)^2-1)}{3}$$

выполнено. Значит, исходное равенство имеет место для любого натурального числа n. Что и требовалось доказать.