Пример решения задачи
Интегральное уравнение Вольтерры

Задание.

Решить уравнение Вольтерры, сведя его к обыкновенному дифференциальному уравнению.

$$y(x)=\int_1^x \frac{x}{t^2}y(t)dt+x^2.$$

Решение.

Поделим на x и возьмем производную:

$$\frac{xy'-y}{x^2}=\frac{y}{x^2}+1,$$

$$xy'=2y+x^2.$$

Решаем однородное уравнение:

$$xy'=2y, \frac{dy}{y}=\frac{2dx}{x}, \ln|y|=2\ln|x|+\ln|C|, y=Cx^2.$$

Далее считаем, что $C=C(x)$, $y'=C'x^2+2xC$. Подставим в исходное дифференциальное уравнение: $C'x^3=x^2, C=\ln|x|+C_1$. Значит, решение дифференциального уравнения

$$y=x^2\ln|x|+C_1x^2.$$

Подставим в интегральное уравнение:

$$x\ln|x|+C_1x=\int_1^x(\ln|t|+C_1)dt+x=x\ln|x|-x+1+C_1x-C_1+x,$$

Откуда $C_1=1$. Значит, решением интегрального уравнения будет $y(x)=x^2\ln|x|+x^2$.

47. Решить уравнение методом последовательных приближений

$$y(x) = 1 + \int_0^x \frac{xy(t)}{x^2 + t^2} dt.$$

Возьмем начальное приближение $y_1 = 1$. Подставляя его в интеграл справа, получим следующую итерацию $y_2 = 1 + \frac{\pi}{4}$. Далее, последовательно подставляя, получим $y_3 = 1 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{16}, \ldots y_n = 1 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{16} + \cdots + \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n-1}$.

Получаем сумму геометрической прогрессии. Отсюда решение $y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n = 1 + \frac{\pi}{4} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{4-\pi}$.