

## Пример решения задачи. Нормальные алгоритмы

*Построить НА (нормальный алгоритм) для выполнения сложения и умножения конструктивных натуральных чисел.*

### Решение:

Алгоритм для выполнения сложения конструктивных натуральных чисел.

Рассмотрим НА в алфавите  $\{0,1,+ \}$ .

Для сложения пары натуральных конструктивных чисел зададим их как слово вида  $011\dots 1+0111\dots 1$ .

Для сложения достаточно выбросить из заданного слова букву «+» и букву «0».

Следовательно, схема НА для сложения имеет одну формулу:

$$+0 \rightarrow \cdot$$

Покажем работу НА на примере слова  $0111+011111$ , удовлетворяющего условиям задачи:

$$0111+011111 \vdash 0111\cdot 11111$$

Если 1-е или 2-е слагаемое нулевые, то алгоритм тоже работает:

$$011\dots 1+0 \vdash 011\dots 1\cdot$$

$$0+011\dots 1 \vdash 0\cdot 11\dots 1$$

Если оба слагаемых равны нулю:

$$0+0 \vdash 0\cdot$$

Алгоритм для выполнения умножения конструктивных натуральных чисел.

Рассмотрим НА в алфавите  $\{0, 1, \times, *, \# \}$ .

Для умножения пары натуральных конструктивных чисел  $m = 0\underbrace{1\dots 1}_m 1$  и

$n = 0\underbrace{11\dots 11}_n$  зададим их как слово вида  $0\underbrace{1\dots 1}_m \times 0\underbrace{11\dots 11}_n$ .

Зададим НА следующим образом:

- (1)  $\left\{ \begin{array}{l} *1 \rightarrow 1\#* \\ * \rightarrow \end{array} \right.$
- (2)
- (3)  $\left\{ \begin{array}{l} \#1 \rightarrow 1\# \\ 1 \times 0 \rightarrow \times 0 * \\ 00 \rightarrow 0 \\ \times 0 \rightarrow 0 \times \\ \times 1 \rightarrow \times \\ \times \# \rightarrow 1 \times \\ \times \rightarrow \cdot \end{array} \right.$
- (4)
- (5)
- (6)
- (7)
- (8)
- (9)

1) Подстановка (4) позволит постепенно уменьшать число единиц первого сомножителя, а дальнейшие шаги для каждой единицы 1-го сомножителя будут формировать набор из  $n$  единиц 2-го сомножителя:

$$01\dots 11 \times 011\dots 111 \mid 01\dots 1 \times 0 * 11\dots 111$$

2) Далее с помощью подстановки (1) символ «\*» проходит через все единицы второго сомножителя и ставит после каждой единицы символ «#», чтобы зафиксировать количество единиц у второго сомножителя:

$$01\dots 1 \times 0 * 11\dots 111 \mid 01\dots 1 \times 01 \# \underline{1} \dots 111 \mid \dots \mid 01\dots 1 \times 01 \# 1 \# \dots 1 \# 1 \# 1 \# *$$

3) С помощью подстановки (2) символ «\*», стоящий в конце уничтожается:

$$01\dots 1 \times 01 \# 1 \# \dots 1 \# 1 \# 1 \# * \mid 01\dots 1 \times 01 \# 1 \# \dots 1 \# 1 \# 1 \#$$

4) С помощью подстановки (3) все буквы «#» переносятся в конец:

$$01 \underbrace{\dots 1}_{m-1} \times 01 \# 1 \# \dots 1 \# 1 \# 1 \# \text{ p } 01 \underbrace{\dots 1}_{m-1} \times \underbrace{011\dots 111}_n \underbrace{\#\#\dots\#\#\#}_n$$

Количество символов «#» в конце равно количеству единиц во 2-м сомножителе.

5) Повторяя шаги 1)–4), получим в конце такое количество символов

«#», которое равно числу 1 в первом сомножителе, умноженное на число единиц во 2-м сомножителе. В результате получим такое слово:

$$0 \times \underbrace{011\dots111}_n \overbrace{\underbrace{\#\#\dots\#\#\#\#}_n \underbrace{\#\#\dots\#\#\#\#}_n \dots \underbrace{\#\#\dots\#\#\#\#}_n}^{n \cdot m}$$

6) Теперь надо уничтожить лишние единицы и лишние нули в начале слова.

Для этого применяются подстановки (5), (6) и (7).

В результате получим такое слово:

$$0 \times \overbrace{\underbrace{\#\#\dots\#\#\#\#}_n \underbrace{\#\#\dots\#\#\#\#}_n \dots \underbrace{\#\#\dots\#\#\#\#}_n}^{n \cdot m}$$

7) Теперь с помощью подстановки (8) заменяем все символы # единицами и передвигаем символ × в конец:

$$0 \underbrace{11\dots11111}_n \underbrace{11\dots111}_n \dots \underbrace{11\dots111}_n \times$$

8) Последняя подстановка (9) уничтожает символ × и заканчивает работу алгоритма.

Покажем работу алгоритма на примере слова 0111×011, т.е. умножим конструктивное натуральное число 3 на конструктивное натуральное число 2.

В результате должно получиться число 0111111.

Заменяемое слово будем выделять красным цветом, результат подстановки будем подчёркивать, а сверху будем указывать применяемую на данном шаге подстановку.

$$\begin{aligned} & 0111 \times 011 \text{ p } \overset{(4)}{011 \times 0 \underline{*} 11} \text{ p } \overset{(1)}{011 \times 0 \underline{1} \# \underline{*} 1} \text{ p } \overset{(1)}{011 \times 0 \underline{1} \# \underline{1} \# \underline{*}} \text{ p } \overset{(2)}{011 \times 0 \underline{1} \# \underline{1} \# \underline{*}} \text{ p } \overset{(3)}{011 \times 0 \underline{1} \# \underline{1} \# \underline{1}} \text{ p} \\ & \overset{(4)}{011 \times 0 \underline{1} \# \underline{1} \# \underline{1}} \text{ p} \\ & \overset{(4)}{\text{p } 0 \underline{1} \times 0 \underline{*} 11} \overset{(1)}{\# \#} \text{ p } \overset{(1)}{0 \underline{1} \times 0 \underline{1} \# \underline{*} 1} \overset{(1)}{\# \#} \text{ p } \overset{(2)}{0 \underline{1} \times 0 \underline{1} \# \underline{1} \# \underline{*}} \overset{(2)}{\# \#} \text{ p } \overset{(3)}{0 \underline{1} \times 0 \underline{1} \# \underline{1} \# \underline{1}} \overset{(3)}{\# \# \#} \text{ p} \\ & \overset{(4)}{0 \underline{1} \times 0 \underline{1} \# \underline{1} \# \underline{1} \# \underline{1}} \text{ p} \end{aligned}$$

