

Тема: Неопределенный интеграл

ЗАДАНИЕ. *Найти неопределенный интеграл*

$$\int \frac{4x^2 + 7x - 23}{(x^2 - 4x + 8)(x + 1)^2} dx.$$

РЕШЕНИЕ. Разложим подынтегральное выражение на сумму простых дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{4x^2 + 7x - 23}{(x^2 - 4x + 8)(x + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 - 4x + 8} + \frac{Cx + D}{(x + 1)^2},$$

$$\begin{cases} A + C & = 0, \\ 2A + B - 4C + D & = 4, \\ A + 2B + 8C - 4D & = 7, \\ B + 8D & = -23. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A & = 1, \\ B & = 1, \\ C & = -1, \\ D & = -3. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^2 + 7x - 23}{(x^2 - 4x + 8)(x + 1)^2} dx &= \int \frac{x + 1}{x^2 - 4x + 8} dx - \int \frac{x + 3}{(x + 1)^2} dx = \\ &= \int \frac{(x - 2)dx}{(x - 2)^2 + 2^2} + 3 \int \frac{dx}{(x - 2)^2 + 2^2} - \int \frac{dx}{x + 1} - 2 \int \frac{dx}{(x + 1)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 - 4x + 8) + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x - 2}{2} - \ln(x + 1) + \frac{2}{x + 1} + C. \end{aligned}$$