Тема: подстановка для интегрирования корней

Задание. *Найти неопределенный интеграл.*

$$\int \frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}$$

Решение:

Делаем замену переменной: $t = x^{1/6}$, $x = t^6$, $dx = 6t^5dt$

$$\int \frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)} = \int \frac{6t^5dt}{t^6\left(t^3+t^4\right)} = \int \frac{6dt}{t\left(t^3+t^4\right)} = \int \frac{6dt}{t^4(1+t)} =$$

Разложим подынтегральную дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{t^4(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t^3} + \frac{D}{t^4} + \frac{E}{t+1},$$

$$1 = At^3(t+1) + Bt^2(t+1) + Ct(t+1) + D(t+1) + Et^4,$$

$$1 = A\left(t^4+t^3\right) + B\left(t^3+t^2\right) + C\left(t^2+t\right) + D(t+1) + Et^4.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях t справа и слева:

$$\begin{cases} A+E=0, \\ A+B=0, \\ B+C=0, \\ C+D=0, \\ D=1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} E=1, \\ A=-1, \\ B=1, \\ C=-1, \\ D=1. \end{cases}$$

$$\frac{1}{t^4(1+t)} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t+1}.$$

Возвращаемся к интегралу:

$$= 6\left[\int \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t+1}\right)dt\right] = 6\left(-\ln|t| - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} - \frac{1}{3t^3} + \ln|t+1|\right) + C =$$

$$= 6\left(-\frac{1}{6}\ln|x| - \frac{1}{x^{1/6}} + \frac{1}{2x^{1/3}} - \frac{1}{3x^{1/2}} + \ln|x^{1/6}+1|\right) + C.$$

Ответ: $\displaystyle \int \frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)} = 6\left(-\frac{1}{6}\ln|x| - \frac{1}{x^{1/6}} + \frac{1}{2x^{1/3}} - \frac{1}{3x^{1/2}} + \ln|x^{1/6}+1|\right) + C.$