

Тема: определенный интеграл от дроби

ЗАДАНИЕ. Вычислить определенный интеграл, предварительно разложив дробь на сумму элементарных дробей.

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2}$$

РЕШЕНИЕ:

Разложим подынтегральную дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

$$1 = A(x+2)^2 + B(x+1)(x+2) + C(x+1),$$

$$1 = A(x^2 + 4x + 4) + B(x^2 + 3x + 2) + C(x+1).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа:

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ 4A + 3B + C = 0, \\ 4A + 2B + C = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -B, \\ -4B + 3B + C = 0, \\ -4B + 2B + C = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -B, \\ -B + C = 0, \\ -2B + C = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -B, \\ -B + C = 0, \\ B = -1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 1, \\ C = -1, \\ B = -1. \end{cases}$$

Получили
$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2} &= \int_1^2 \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2} \right] dx = \left[\ln|x+1| - \ln|x+2| + \frac{1}{x+2} \right]_1^2 = \\ &= \left[\ln|2+1| - \ln|2+2| + \frac{1}{2+2} \right] - \left[\ln|1+1| - \ln|1+2| + \frac{1}{1+2} \right] = \\ &= \ln 3 - \ln 4 + \frac{1}{4} - \ln 2 + \ln 3 - \frac{1}{3} = \ln \frac{9}{8} - \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

ОТВЕТ: $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2} = \ln \frac{9}{8} - \frac{1}{12}.$