Прикладная математика

Пример решения задачи теории массового обслуживания

Задача. *Маленький современный магазин может вместить в себя не более 7 покупателей. В магазине работают одновременно 2 продавца. В среднем в час в магазин заходят 20 покупателей. Средняя длительность обслуживания клиента составляет 6 мин. Если войти в магазин нельзя, покупатель уходит в другой аналогичный магазин. Потоки заявок и обслуживаний простейшие. Определить характеристики обслуживания магазина в стационарном режиме (вероятность простоя продавцов, вероятность отказа, вероятность обслуживания, среднее число занятых обслуживанием продавцов, среднее число покупателей в очереди, среднее число покупателей в магазине, абсолютную пропускную способность, относительную пропускную способность, среднее время покупателя в очереди, среднее время покупателя в магазине, среднее время обслуживания покупателя).*

Решение. Имеем систему массового обслуживания (СМО) с 2 каналами (2 продавца), с ожиданием и ограниченной очередью (всего 7 мест в магазине для покупателей).

Получаем параметры $n=2$ (число каналов), $m=5$ (число мест в очереди), $\lambda=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$ (интенсивность входящего потока, покупателей в минуту), $\mu=1/6$ (интенсивность потока обслуживания, один человек за 6 минут). Определим характеристики работы данной СМО в предельном режиме.

Вводим параметр $\psi = \frac{\lambda}{n\mu} = \frac{1/3}{2\cdot 1/6} = 1$ - показатель нагрузки на один канал.

Тогда предельные вероятности определяются по следующим формулам:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}\psi^k + \frac{n^n}{n!}\frac{\psi^{n+1}(1-\psi^m)}{1-\psi} \right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{2^0}{0!}1^0 + \frac{2^1}{1!}1^1 + \frac{2^2}{2!}1^2 + \frac{2^2}{2!}\cdot\frac{1^3(1-1^5)}{1-1} \right)^{-1} \approx 0,067.$$

Остальные вероятности:

$$p_k = \frac{n^k}{k!}\psi^k p_0, \ k = 1,2 \ \text{ и } \ p_k = \frac{n^n}{n!}\psi^k p_0, \ k = 3,4,5,6,7 .$$

Вероятность простоя каналов (продавцов): $p_0 \approx 0,067$.

Вероятность отказа в обслуживании $p_r = p_7 = \frac{2^2}{2!}1^7 \cdot 0,067 \approx 0,133$.

Относительная пропускная способность (вероятность обслуживания)

$$Q = 1 - p_r = 1 - 0,133 = 0,867 .$$

Абсолютная пропускная способность $A = \lambda Q = \frac{1}{3}\cdot 0,867 = 0,289$.

Среднее число занятых каналов (продавцов)

$$N_s = \frac{A}{\mu} = \frac{0,289}{1/6} = 1,733 .$$

Среднее число заявок в очереди (покупателей в очереди)

$$N_{line} = \frac{n^n}{n!}\psi^{n+1}\frac{1-\psi^m(m+1-m\psi)}{(1-\psi)^2}p_0 = \frac{2^2}{2!}\cdot 1^3 \cdot \frac{1-1^5(5+1-5\cdot 1)}{(1-1)^2}\cdot 0,067 = 2 .$$

Среднее число заявок в системе (покупателей в магазине)

$N = N_s + N_{line} = 1,733 + 2 = 3,733$.

Среднее время заявки под обслуживанием

$T_s = \frac{N_s}{\lambda} = \frac{1,733}{1/3} = 5,2$ минуты.

Среднее время заявки в очереди (ожидания покупателя)

$T_{line} = \frac{N_{line}}{\lambda} = \frac{2}{1/3} = 6$ минут.

Среднее время заявки в системе (полное время обслуживания покупателя в магазине)

$T = T_s + T_{line} = 5,2 + 6 \approx 11,2$ минуты.