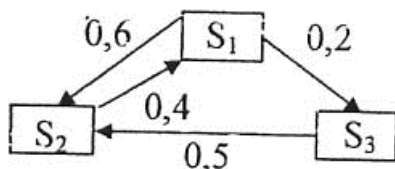


## Граф переходов состояния марковского процесса

### Пример решения задачи

**Задача.** Дан размеченный граф состояний системы.



Найти:

- А) матрицы перехода за один и два шага,
- Б) вероятности состояний системы после первого, второго, третьего шага, если в начальный момент система находилась в состоянии  $S_1$ ,
- В) финальные вероятности.

**Решение.** Имеем вероятности (по графу состояний):

$$p_{12} = 0,6, \quad p_{13} = 0,2, \quad \text{тогда } p_{11} = 1 - 0,6 - 0,2 = 0,2.$$

$$p_{21} = 0,4, \quad p_{23} = 0, \quad \text{тогда } p_{22} = 1 - 0,4 - 0 = 0,6.$$

$$p_{32} = 0,5, \quad p_{31} = 0, \quad \text{тогда } p_{33} = 1 - 0,5 - 0 = 0,5.$$

Получаем матрицу перехода за один шаг:

$$P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода за два шага:

$$P_2 = P^2 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,28 & 0,58 & 0,14 \\ 0,32 & 0,60 & 0,08 \\ 0,20 & 0,55 & 0,25 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода за три шага:

$$P_3 = P^3 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,28 & 0,58 & 0,14 \\ 0,32 & 0,60 & 0,08 \\ 0,20 & 0,55 & 0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,288 & 0,586 & 0,126 \\ 0,304 & 0,592 & 0,104 \\ 0,260 & 0,575 & 0,165 \end{pmatrix}.$$

Начальное состояние:  $p_0 = (S_1) = (1; 0; 0)$ .

Тогда

1) вероятности состояний системы после первого шага:  $p_1 = p_0 P = (0, 2; 0, 6; 0, 2)$  (первая строка матрицы  $P$ ).

2) вероятности состояний системы после второго шага:  $p_2 = p_0 P_2 = (0, 28; 0, 58; 0, 14)$  (первая строка матрицы  $P_2$ ).

3) вероятности состояний системы после третьего шага:  $p_3 = p_0 P_3 = (0, 288; 0, 586; 0, 126)$  (первая строка матрицы  $P_3$ ).

Финальные вероятности найдем из условий:  $p \cdot P = p$ ,  $p = (p_1, p_2, p_3)$ ,  $\sum p_i = 1$ . Получаем систему:

$$\begin{cases} 0,2p_1 + 0,4p_2 = p_1, \\ 0,6p_1 + 0,6p_2 + 0,5p_3 = p_2, \\ 0,2p_1 + 0,5p_3 = p_3, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8p_1 + 4p_2 = 0, \\ 6p_1 - 4p_2 + 5p_3 = 0, \\ 2p_1 - 5p_3 = 0, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1 = 5/17, \\ p_2 = 10/17, \\ p_3 = 2/17. \end{cases}$$