Рекуррентные соотношения
Пример решения

Задание.

Решить рекуррентное соотношение $f(n+2)=-6f(n+1)+7f(n)+n-3$ *с начальными условиями* $f(0)=2, f(1)=4$ *и сделать проверку*

Решение.

Перепишем соотношение в виде $f(n+2)+6f(n+1)-7f(n)=n-3$

Решим сначала однородное соотношение $f(n+2)+6f(n+1)-7f(n)=0$

Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2+6\lambda-7=0$$
$$\lambda=1, \lambda=-7$$

Значит, $f(n)=A\cdot 1^n+B\cdot(-7)^n=A+B\cdot(-7)^n$

Так как 1 является решением характеристического уравнения, поэтому частное решение для $n-3$ будем искать в виде $f=Cn^2+Dn$, тогда получаем

$$f(n)=Cn^2+Dn$$
$$f(n+1)=C(n+1)^2+D(n+1)$$
$$f(n+2)=C(n+2)^2+D(n+2)$$
$$f(n+2)+6f(n+1)-7f(n)=C(n+2)^2+D(n+2)+6\left(C(n+1)^2+D(n+1)\right)-7\left(Cn^2+Dn\right)=$$
$$=Cn^2+4Cn+4+Dn+2D+6\left(Cn^2+2Cn+C+Dn+D\right)-7Cn^2-7Dn=16Cn+10C+8D=$$
$$=n-3$$

$$\begin{cases}16C=1\\10C+8D=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=\dfrac{1}{16}\\D=-\dfrac{29}{64}\end{cases}$$

Значит, общее решение есть $f(n)=A+B\cdot(-7)^n+\dfrac{1}{16}n^2-\dfrac{29}{64}n$

Найдем коэффициенты A, B

$$f(0)=A+B\cdot(-7)^0+\frac{1}{16}0^2-\frac{29}{64}0=A+B=2$$

$$f(1)=A+B\cdot(-7)^1+\frac{1}{16}1^2-\frac{29}{64}1=A-7B-\frac{25}{64}=4$$

$$\begin{cases}A+B=2\\ A-7B-\frac{25}{64}=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2-B\\ 2-B-7B-\frac{25}{64}=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2-B\\ -8B=\frac{153}{64}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2-\left(-\frac{153}{512}\right)\\ B=-\frac{153}{512}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{1177}{512}\\ B=-\frac{153}{512}\end{cases}$$

Тогда, получаем

$$f(n)=\frac{1177}{512}-\frac{153}{512}\cdot(-7)^n+\frac{1}{16}n^2-\frac{29}{64}n$$

Проверим данное решение

$$f(n+2)+6f(n+1)-7f(n)=\left[\frac{1177}{512}-\frac{153}{512}\cdot(-7)^{n+2}+\frac{1}{16}(n+2)^2-\frac{29}{64}(n+2)\right]+$$

$$+6\left[\frac{1177}{512}-\frac{153}{512}\cdot(-7)^{n+1}+\frac{1}{16}(n+1)^2-\frac{29}{64}(n+1)\right]-7\left[\frac{1177}{512}-\frac{153}{512}\cdot(-7)^n+\frac{1}{16}n^2-\frac{29}{64}n\right]=$$

$$=\left(\frac{1177}{512}+6-\frac{1177}{512}-7-\frac{1177}{512}\right)+(-7)^n\left(-49*\frac{153}{512}+42*\frac{153}{512}+7*\frac{153}{512}\right)+$$

$$+\left(\frac{n^2}{16}+\frac{4n}{16}+\frac{4}{16}-\frac{29}{64}n-\frac{29}{32}+\frac{6n^2}{16}+\frac{12n}{16}+\frac{6}{16}-\frac{174}{64}n-\frac{174}{64}-\frac{7}{16}n^2+\frac{203}{65}n\right)=0$$

Значит, решение найдено верно

Проверим начальные условия

$$f(0)=\frac{1177}{512}-\frac{153}{512}\cdot(-7)^0+\frac{1}{16}0^2-\frac{29}{64}0=2$$

$$f(1)=\frac{1177}{512}-\frac{153}{512}\cdot(-7)^1+\frac{1}{16}1^2-\frac{29}{64}1=4$$