Бинарные отношения: задача с решением

Задание.

Найти область определения, область значений отношения P. Является ли отношение P рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным.
$P \subseteq Z^2, \langle x, y \rangle \in P \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.

Решение.

Так как отношение определено на множестве целых точек плоскости ($P \subseteq Z^2$), можно легко представить его графически.

Представляем на плоскости окружность $x^2 + y^2 = 1$ радиуса 1 с центром в начале координат. Выделяем целые точки, которые на ней лежат. Это, очевидно: $P = \{\langle 0,1 \rangle, \langle 1,0 \rangle, \langle 0,-1 \rangle, \langle -1,0 \rangle\}$.

Область определения отношения P тогда равна $D(P) = \{-1;0;1\}$.
Область значения отношения P равна $E(P) = \{-1;0;1\}$.

Отношение не является рефлексивным, так как ни для каких целых $x \in Z$ не выполняется, что $x^2 + x^2 = 1$, так как в таком случае $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \notin Z$.
Отношение является симметричным, так как для любых $x, y \in Z$, таких что $\langle x, y \rangle \in P$ (то есть $x^2 + y^2 = 1$), верно, что $\langle y, x \rangle \in P$ (то есть $y^2 + x^2 = 1$).

Отношение не является антисимметричным.

Отношение не является транзитивным, так как для любых $x, y, t \in Z$, таких что $\langle x, y \rangle \in P, \langle y, t \rangle \in P$ (то есть $x^2 + y^2 = 1,\ y^2 + t^2 = 1$), не следует, что $\langle x, t \rangle \in P$ (то есть $x^2 + t^2 = 1$). Действительно, если $x^2 + y^2 = 1,\ y^2 + t^2 = 1$, то отсюда $x^2 = t^2$, поэтому $x^2 + t^2 = 2t^2 = 1,\ t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \notin Z$.

Также эти свойства отношения можно было получить, опираясь на явный вид отношения: $P = \{\langle 0,1 \rangle, \langle 1,0 \rangle, \langle 0,-1 \rangle, \langle -1,0 \rangle\}$.