

Тема: Ряды

ЗАДАНИЕ. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и затем проинтегрировав почленно

$$\int_0^{0,25} \frac{\sin x}{x} dx$$

РЕШЕНИЕ. Воспользуемся известным разложением

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

и получим, что

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{0,25} \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^{0,25} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right) dx = \\ &= \left(x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600} - \frac{x^7}{35280} + \dots \right) \Big|_0^{0,25} = 0,25 - 0,0009 + \dots \approx 0,25. \end{aligned}$$

Все члены, начиная с 0,0009, можно отбросить, при этом погрешность вычислений не превысит 0,001 (так в знакопередающемся ряде погрешность не превосходит по модулю первого отброшенного члена).