Тема: Моногенность и голоморфность функции

Задание. *Исследуйте на моногенность и голоморфность* $f(z)=(\operatorname{Re} z)^2$.

Решение.

Исследуем функцию $f(z)=(\operatorname{Re} z)^2=x^2$ на моногенность.

Функция $f(z)$, определенная в окрестности точки $z_0 \in C$ называется моногенной, если она имеет производную в точке z_0 [6, с.33].

По теореме [5, с.31], для того, чтобы функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ была дифференцируема в точке $z_0=x_0+iy_0$, необходимо и достаточно, чтобы:

1) существовали непрерывные частные производные $u(x,y), v(x,y)$;

2) выполнялись в точке z_0 условия Коши-Римана: $\begin{cases} u'_x=v'_y, \\ u'_y=-v'_x. \end{cases}$

Для заданной функции $f(z)$ найдем вещественную и мнимую части. Пусть $z=x+iy$, тогда вещественная часть комплексного числа z $\operatorname{Re} z=x$. Функция $f(z)=(\operatorname{Re} z)^2=x^2$. Вещественная часть $\operatorname{Re}(f(z))=u(x,y)=x^2$, мнимая часть $\operatorname{Im}(f(z))=v(x,y)=0$.

Найдем частные производные функций $u(x,y), v(x,y)$:

$(u(x,y))'_x=2x; \qquad (v(x,y))'_x=0;$

$(u(x,y))'_y=0; \qquad (v(x,y))'_y=0.$

Таким образом, частные производные функций $u(x,y), v(x,y)$ существуют и являются непрерывными функциями, то есть первое условие теоремы выполняется.

Проверим выполнение условий Коши-Римана.

$$\begin{cases} u'_x=v'_y, \\ u'_y=-v'_x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=0, \\ 0=0, \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

Таким образом, условия Коши-Римана выполнены на множестве $D=\{x=0, y\in R\}$. На это множестве функция $f(z)$ дифференцируема.

Производные функции $f(z)$ в точках $z=0+iy$ [5, с.31] области D

$$f'(z)=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}+i\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.(2x+0i)\right|_{x=0}=0.$$

Исследуем функцию $f(z)$ на голоморфность.

Функция $f(z)$, определенная в области D, называется голоморфной в D если она имеет производную в каждой точке D [2, с.14].

В нашем случае функция $f(z)$ голоморфна в области $D=\{x=0, y\in R\}$. $f'(z)=0$ в каждой точке этой области.

Ответ: функция $f(z)=(\operatorname{Re} z)^2$ моногенна и голоморфна в области $D=\{x=0, y\in R\}$