

## Пример решения задачи (Тишин)

### Графы, множества, соответствия

ЗАДАНИЕ.

Дано соответствие  $\Gamma = (X, Y, G)$ .

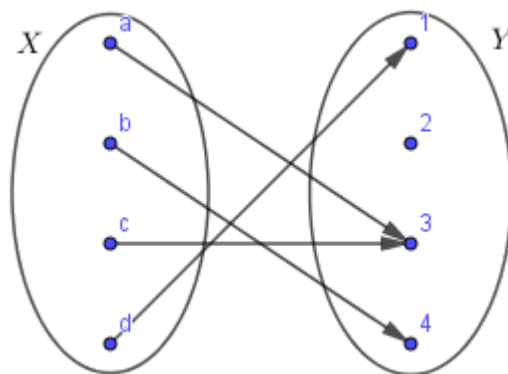
$$X = \{a, b, c, d\}, Y = \{1, 2, 3, 4\}, G = \{(a, 3), (b, 4), (c, 3), (d, 1)\}$$

1. Изобразить соответствие в виде графа.
2. Выяснить, какими из 4 основных свойств (всюду определённость, сюръективность, функциональность, инъективность) обладает  $\Gamma$ .
3. Найти образ множества  $A = \{a, c\}$  и прообраз множества  $B = \{1, 3\}$  при данном соответствии.
4. Построить соответствие между бесконечными множествами, обладающее тем же набором свойств, что и  $\Gamma$ .
5. Построить соответствие между конечными множествами, обладающее набором свойств, противоположным данному.

Замечание. Для данного и построенных соответствий отметить случаи отображений, указать их тип, отметить случаи биекций.

РЕШЕНИЕ.

1. Изобразим заданное соответствие в виде графа:



2. Так как  $\text{pr}_1 G = \{a, b, c, d\} = X$ , то заданное соответствие всюду определено.

Так как  $\text{pr}_2 G = \{1, 3, 4\} \neq Y$ , то заданное соответствие не является сюръективным.

Так как график соответствия не содержит пар с одинаковыми первыми и различными вторыми координатами, соответствие является функциональным.

Так как график соответствия содержит пары с одинаковыми вторыми и различными первыми координатами (например,  $(a, 3), (c, 3)$ ), то соответствие не является инъективным.

Так как соответствие всюду определено и функционально, но не сюръективно и не инъективно, то оно является отображением  $X$  в  $Y$ .

3. Найдем образ множества  $A = \{a, c\}$  и прообраз множества  $B = \{1, 3\}$  при данном соответствии.

Так как  $A = \{a, c\}$  и  $\{(a, 3), (c, 3)\} \subseteq G$ , то  $\Gamma(A) = \{3\}$ .

Так как  $B = \{1, 3\}$  и  $\{(a, 3), (c, 3), (d, 1)\} \subseteq G$ , то  $\Gamma^{-1}(B) = \{a, c, d\}$ .

4. Построим соответствие между бесконечными множествами, обладающее тем же набором свойств, что и  $\Gamma$ .

Например, пусть  $X = [-1; 1], Y = (-\infty; +\infty), G = \{(x, y): x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ .

Так как  $\text{pr}_1 G = [-1; 1] = X$ , то заданное соответствие всюду определено.

Так как  $\text{pr}_2 G = [0; 1] \neq Y$ , то заданное соответствие не является сюръективным.

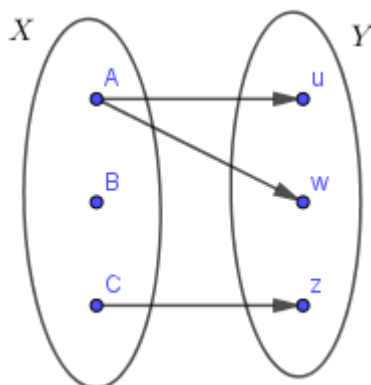
Так как график соответствия не содержит пар с одинаковыми первыми и различными вторыми координатами, соответствие является функциональным.

Так как график соответствия содержит пары с одинаковыми вторыми и различными первыми координатами (например,  $(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$ ), то соответствие не является инъективным.

Так как соответствие всюду определено и функционально, но не сюръективно и не инъективно, то оно является отображением  $X$  в  $Y$ .

5. Построим соответствие между конечными множествами, обладающее набором свойств, противоположным данному, то есть не всюду определенное, не функциональное, сюръективное, инъективное.

Пусть  $X = \{A, B, C\}, Y = \{u, w, z\}, G = \{(A, u), (A, w), (C, z)\}$ .



Так как  $\text{pr}_1 G = \{A, C\} \neq X$ , то заданное соответствие не всюду определено.

Так как  $\text{pr}_2 G = \{u, w, z\} = Y$ , то заданное соответствие является сюръективным.

Так как график соответствия содержит пары с одинаковыми первыми и различными вторыми координатами (например,  $(A, u), (A, w)$ ), соответствие не является функциональным.

Так как график соответствия не содержит пар с одинаковыми вторыми и различными первыми координатами, то соответствие является инъективным.

Построенное соответствие не является отображением.

Ответ.

2. Заданное соответствие всюду определено и функционально, но не сюръективно и не инъективно; является отображением  $X$  в  $Y$ .

3.  $\Gamma(A) = \{3\}; \Gamma^{-1}(B) = \{a, c, d\}$ .

4. Соответствие между бесконечными множествами, обладающее тем же набором свойств, что и  $\Gamma: X = [-1; 1], Y = (-\infty; +\infty), G = \{(x, y): x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ . Построенное соответствие является отображением  $X$  в  $Y$ .

5. Соответствие между конечными множествами, обладающее набором свойств, противоположным свойствам  $\Gamma$ :

Решение задачи из сборника Тишина В.В. скачано с  
[https://www.matburo.ru/ex\\_dm.php?p1=dmtish](https://www.matburo.ru/ex_dm.php?p1=dmtish)

(больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, программированию

$X = \{A, B, C\}, Y = \{u, w, z\}, G = \{(A, u), (A, w), (C, z)\}$ . Построенное соответствие не является отображением.