

Решение задачи о раскрое стержней

ЗАДАНИЕ.

Завод заключил договор на поставку комплектов стержней длиной 18, 23 и 32 см. Причём количество стержней разной длины в комплекте должно быть в соотношении 1:5:3. на сегодняшний день имеется 80 стержней длиной 89 см. Как их следует разрезать, чтобы количество комплектов было максимальным? Какова при этом будет величина отходов?

РЕШЕНИЕ.

Составляем математическую модель раскроя с учётом комплектации и ограничением на используемый материал.

Определяем все рациональные способы раскроя материала (т.е. стержней длиной 89 см) на заготовки типа А (стержни длиной 32 см), типа В (стержни длиной 23 см) и типа С (стержни длиной 18 см). Таких способов оказывается девять.

Вариант раскроя	Количество стержней, шт.			Величина отходов
	Стержень А	Стержень В	Стержень С	
1	2	1	0	2
2	2	0	1	7
3	1	2	0	1

4	1	1	1	6	1
5	1	0	3	3	3
6	0	3	1	2	2
7	0	2	2	7	7
8	0	1	3	2	1
9	0	0	4	7	1

Обозначим

x_1 – количество стержней, раскраиваемых по 1-му варианту,
 x_2 – количество стержней, раскраиваемых по 2-му варианту,
 x_3 – количество стержней, раскраиваемых по 3-му варианту,
 x_4 – количество стержней, раскраиваемых по 4-му варианту,
 x_5 – количество стержней, раскраиваемых по 5-му варианту,
 x_6 – количество стержней, раскраиваемых по 6-му варианту,
 x_7 – количество стержней, раскраиваемых по 7-му варианту,
 x_8 – количество стержней, раскраиваемых по 8-му варианту,
 x_9 – количество стержней, раскраиваемых по 9-му варианту,
 N – количество комплектов.

Общее количество раскраиваемых стержней не должно превышать имеющееся количество, т.е. 80. Следовательно, имеем первое ограничение:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \leq 80.$$

Общее количество всех заготовок А, полученное при раскрое равно $2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5$.

Общее количество всех заготовок В, полученное при раскрое равно

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

$$x_1 + 2x_3 + x_4 + 3x_6 + 2x_7 + x_8.$$

Общее количество всех заготовок С, полученное при раскрое равно

$$x_2 + x_4 + 3x_5 + x_6 + 2x_7 + 3x_8 + 4x_9.$$

Т.к. число комплектов равно N и в каждом комплекте должно быть 1 заготовка С, 5 заготовок В и 3 заготовки А, то всего должно быть не менее N заготовок С, $5N$ заготовок В и $3N$ заготовок А, т.е.

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 3N;$$

$$x_1 + 2x_3 + x_4 + 3x_6 + 2x_7 + x_8 \geq 5N;$$

$$x_2 + x_4 + 3x_5 + x_6 + 2x_7 + 3x_8 + 4x_9 \geq N.$$

В задаче требуется найти максимальное значение целого числа N .

Математическая модель задачи имеет вид:

Найти $\max N$

при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 3N \geq 0 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 + 3x_6 + 2x_7 + x_8 - 5N \geq 0 \\ x_2 + x_4 + 3x_5 + x_6 + 2x_7 + 3x_8 + 4x_9 - N \geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \leq 80 \end{cases}$$

и при выполнении условий $x_i \geq 0$, $N \geq 0$, x_i – целые.

Решаем задачу в EXCEL с использованием модуля «Поиск решения».

Введённые значения и формулы

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K		L	M
1	Система ограничений													
2	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	N				
3	2	2	1	1	1	0	0	0	0	-3	=СУММПРОИЗВ(A3:J3;\$A\$9:\$J\$9)	>=	0	
4	1	0	2	1	0	3	2	1	0	-5	=СУММПРОИЗВ(A4:J4;\$A\$9:\$J\$9)	>=	0	
5	0	1	0	1	3	1	2	3	4	-1	=СУММПРОИЗВ(A5:J5;\$A\$9:\$J\$9)	>=	0	
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	=СУММПРОИЗВ(A6:J6;\$A\$9:\$J\$9)	<=	80	
7														
8	Решение(изменяемые ячейки)													
9														
10	Кол-во комплектов(целевая ф-ция)													
11	=J9													

Полученное решение

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Система ограничений											
2	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	N		
3	2	2	1	1	1	0	0	0	0	-3	0	>=
4	1	0	2	1	0	3	2	1	0	-5	0	>=
5	0	1	0	1	3	1	2	3	4	-1	5	>=
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	80	<=
7												
8	Решение(изменяемые ячейки)											
9	45	0	0	0	0	35	0	0	0	30		
10	Кол-во комплектов(целевая ф-ция)											
11	30											

Из полученного решения видно, что для получения оптимального раскроя необходимо разрезать 45 стержней по варианту 1, т.е. из каждого из 45-и стержней длиной 89 см получить 2 стержня по 32 см и 1 стержень 23 см, и 35 стержней разрезать по варианту раскроя б, т.е. из каждого из этих 35-и

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию
стержней длиной 89 см получить 3 стержня по 23 см длиной и 1 стержень
длиной 18 см.

Таким образом, мы получим из 80-и стержней длиной 89 см $2 \times 45 = 90$ стержней длиной 32 см, $1 \times 45 + 3 \times 35 = 150$ стержней длиной 23 см и $1 \times 35 = 35$ стержней длиной 18 см. Из этого набора можно образовать $N=30$ полных наборов и 5 стержней длиной 18 см останутся лишними.

Подсчитаем величину отходов при таком плане.

Каждый разрез стержня по 1-му варианту даёт 2 см отходов.

Следовательно, из 45-и разрезанных по 1-му варианту стержней мы получим 90 см отходов.

Каждый разрез стержня по 6-му варианту даёт тоже 2 см отходов.

Следовательно, из 35-и разрезанных по 6-му варианту стержней мы получим ещё 70 см отходов.

Если оставшиеся неукomплектованными 5 стержней длиной 18 см тоже считать отходами, то это добавляет ещё $5 \times 18 = 90$ см отходов.

Итого получаем $90 + 70 + 90 = 250$ см отходов.