Тема: Линейная алгебра

Задание. *Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования A, заданного уравнениями $x' = 5x + 4y$, $y' = 8x + 9y$.*

Решение. Запишем матрицу преобразования для A:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 8 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или } \lambda^2 - 14\lambda + 13 = 0.$$

Из этого квадратного уравнения найдем $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 13$. Для определения координат первого собственного вектора $u_1(\xi_1, \xi_2)$, соответствующего характеристическому числу λ_1 решим систему

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\lambda_1 - 5)\xi_1 + 4\xi_2 & = 0, \\ 8\xi_1 + (9 - \lambda_1)\xi_2 & = 0; \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 4\xi_1 + 4\xi_2 & = 0, \\ 8\xi_1 + 8\xi_2 & = 0. \end{array} \right.$$

Отсюда $\xi_1 = -\xi_2$, то есть собственный вектор u_1 имеет координаты $(C, -C)$, где C - любое число (фактически, характеристическому числу λ_1 соответствует семейство собственных векторов).

Аналогично найдем координаты второго собственного вектора $u_2(\xi_1, \xi_2)$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\lambda_2 - 5)\xi_1 + 4\xi_2 & = 0, \\ 8\xi_1 + (9 - \lambda_2)\xi_2 & = 0; \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} -8\xi_1 + 4\xi_2 & = 0, \\ 8\xi_1 - 4\xi_2 & = 0. \end{array} \right.$$

Отсюда $\xi_2 = 2\xi_1$, то есть собственный вектор u_2 имеет координаты $(C, 2C)$, где C - любое число (фактически, характеристическому числу λ_2 соответствует семейство собственных векторов).