

## Тема: Системы линейных уравнений

ЗАДАНИЕ. Исследовать на совместность и решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 0x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 + 0x_4 = -3, \\ 0x_1 + 0x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ:

Будем работать с расширенной матрицей системы:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Будем одновременно исследовать на совместность и решать систему уравнений, приводя матрицу к более простому виду с помощью элементарных преобразований (методом Жордана-Гаусса).

Вычитаем из третьей строки вторую:

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Умножим последнюю строку на (-1)

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Прибавим последнюю строку к первой и третьей:

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Поделим третью строку на 4. Получим:

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Вычтем из первой строки третью, умноженную на 4.

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Поделим первую строку на 5. Получим:

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Вычитаем из второй строки первую, умноженную на 2. Прибавим к третьей строке первую. Прибавим к четвертой строке первую, умноженную на 2. Получим:

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Получили, что ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы одинаковы и равны 4, система совместна. Ее решение имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 2, \\ x_4 = 1. \end{cases}$$