

## Численные методы: примеры решений в Excel

### Задание

Найти стационарные точки, проверить их на экстремальность, а также найти все локальные и глобальные максимумы и минимумы.

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2x_3 + 3x_2x_3 - x_1 \rightarrow \text{extr}$$

### Решение

Находим дифференциалы функции.

$$\frac{df(x_1, x_2)}{dx_1} = 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 1$$

$$\frac{df(x_1, x_2)}{dx_2} = 2x_2 + x_1 + 6x_3$$

Приравниваем их к 0.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 1 = 0 \\ 2x_2 + x_1 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

Единственным решением данной системы является:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2x_3 + 2}{3} \\ x_2 = -\frac{10x_3 + 1}{3} \end{cases}$$

Так при  $x_3 = 2$ :

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -7 \end{cases}$$

Далее находим вторые производные.

$$A = \frac{d^2 f(x_1, x_2)}{dx_1 dx_1} = 2$$

$$B = \frac{d^2 f(x_1, x_2)}{dx_1 dx_2} = 1$$

$$C = \frac{d^2 f(x_1, x_2)}{dx_2 dx_2} = 2$$

$$B = \frac{d^2 f(x_1, x_2)}{dx_2 dx_1} = 1$$

Поскольку  $A > 0$  и  $AC - B^2 = 3 > 0$ , то в данной точке минимум.

Для нахождения локальных и глобальных максимумов используем Excel.

Переменную  $x_3$  фиксируем = 2.

Глобальный минимум:

Данная работа выполнена на сайте [www.matburo.ru](http://www.matburo.ru)  
 Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу  
[https://www.matburo.ru/ex\\_cm.php?p1=cmexcel](https://www.matburo.ru/ex_cm.php?p1=cmexcel)  
 ©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

D2    fx    =A2\*A2+B2\*B2+2\*C2\*C2+A2\*B2+2\*A2\*C2+3\*B2\*C2+3\*B2\*C2-A2

|   | A  | B  | C  | D        | E | F | G | H | I | J |
|---|----|----|----|----------|---|---|---|---|---|---|
| 1 | x1 | x2 | x3 | F(x1,x2) |   |   |   |   |   |   |
| 2 |    |    | 2  | 8        |   |   |   |   |   |   |

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию: \$D\$2

До:  Максимум  Минимум  Значения: 0

Изменяя ячейки переменных: \$A\$2:\$B\$2

Получаем.

| x1   | x2    | x3 | F(x1,x2) |
|------|-------|----|----------|
| 2,00 | -7,00 | 2  | -31      |

Решение совпадает с найденным аналитически.

Пробуем вводить ограничения.

D2    fx    =A2\*A2+B2\*B2+2\*C2\*C2+A2\*B2+2\*A2\*C2+3\*B2\*C2+3\*B2\*C2-A2

|   | A    | B     | C  | D        | E | F | G | H | I | J |
|---|------|-------|----|----------|---|---|---|---|---|---|
| 1 | x1   | x2    | x3 | F(x1,x2) |   |   |   |   |   |   |
| 2 | 2,00 | -7,00 | 2  | -31      |   |   |   |   |   |   |

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию: \$D\$2

До:  Максимум  Минимум  Значения: 0

Изменяя ячейки переменных: \$A\$2:\$B\$2

В соответствии с ограничениями: \$A\$2 <= 1

Добавить

| x1   | x2    | x3 | F(x1,x2) |
|------|-------|----|----------|
| 1,00 | -6,50 | 2  | -30,25   |

Данная работа выполнена на сайте [www.matburo.ru](http://www.matburo.ru)  
 Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу  
[https://www.matburo.ru/ex\\_cm.php?p1=cmexcel](https://www.matburo.ru/ex_cm.php?p1=cmexcel)  
 ©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

|   | A    | B     | C  | D        | E | F | G | H | I | J |
|---|------|-------|----|----------|---|---|---|---|---|---|
| 1 | x1   | x2    | x3 | F(x1,x2) |   |   |   |   |   |   |
| 2 | 1,00 | -8,00 | 2  | -28      |   |   |   |   |   |   |

  

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию:

До:  Максимум  Минимум  Значения:

Изменяя ячейки переменных:

В соответствии с ограничениями:

| x1   | x2    | x3 | F(x1,x2) |
|------|-------|----|----------|
| 1,00 | -8,00 | 2  | -28      |

Как видим, при смещении интервала минимизирования относительно точки (2;-7) влево минимум функции находится на правой границе интервала, то же самое будет происходить если сместить левую границу интервала минимизирования вправо - минимум функции будет находится на левой границе интервала.

Таким образом, точка (2;-7) – глобальный минимум, все локальные минимумы стремятся к нему.

В общем виде глобальный минимум:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2x_3 + 2}{3} \\ x_2 = -\frac{10x_3 + 1}{3} \end{cases}$$