Задача с решением
Дифференциальное уравнение в частных производных

Задание.

Найти поверхность, удовлетворяющую данному уравнению и проходящую через данную линию.

$$z\frac{\partial z}{\partial x}+\left(z^2-x^2\right)\frac{\partial z}{\partial y}=-x;\quad y=x^2,\quad z=2x.$$

Решение.

Составляем систему уравнений

$$\frac{dx}{z}=\frac{dy}{z^2-x^2}=\frac{dz}{-x}.$$

Найдем ее первые интегралы:

$$\frac{dx}{z}=\frac{dz}{-x},$$

$$-xdx=zdz,$$

$$-\frac{x^2}{2}=\frac{z^2}{2}-\frac{1}{2}C_1,$$

$$C_1=x^2+z^2,$$

$$\frac{zdx+xdz}{z^2-x^2}=\frac{dy}{z^2-x^2},$$

$$zdx+xdz=dy,$$

$$d\left(xz\right)=dy, \qquad (1)$$

$$xz=y+C_2,$$

$$xz-y=C_2.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения можно записать в виде:

$$F\left(x^2+z^2;xz-y\right)=0,$$

где F – произвольная функция.

Чтобы найти интегральную поверхность, проходящую через заданную линию, запишем эту линию в параметрическом виде, например, взяв x в качестве параметра:

$x = x, y = x^2, z = 2x$.

Подставив эти выражения в (1), получим

$C_1 = x^2 + z^2 = x^2 + 4x^2 = 5x^2$,

$C_2 = xz - y = x \cdot 2x - x^2 = x^2$.

Исключив x, получим

$C_1 = 5C_2$.

Подставив вместо C_1 и C_2 левые части первых интегралов (1), найдем искомое решение:

$x^2 + z^2 = 5(xz - y)$.

Ответ: $x^2 + z^2 = 5(xz - y)$.