Тема: Корни комплексного уравнения

Задание. *Найти все комплексные корни заданного уравнения, отметить найденные корни на комплексной плоскости:*
$z^6 - 7z^3 - 8 = 0$.

Решение. Сделаем замену переменной: $x = z^3$, получим квадратное уравнение:
$x^2 - 7x - 8 = 0$, корни которого по теореме Виета равны $x_1 = -1, \ x_2 = 8$.

Тогда приходим к двум уравнениям $z^3 = -1$ и $z^3 = 8$. Решим их последовательно.
$z^3 = -1 = w,$

$z = \sqrt[3]{w}$

Запишем w в тригонометрической форме: $w = \cos\pi + i\sin\pi$.
Тогда корни этого уравнения:

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,5 + 0,866i,$$

$$z_2 = \cos\frac{\pi + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi}{3} = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$

$$z_3 = \cos\frac{\pi + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 4\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,5 - 0,866i.$$

$z^3 = 8 = w,$

$z = \sqrt[3]{w}$

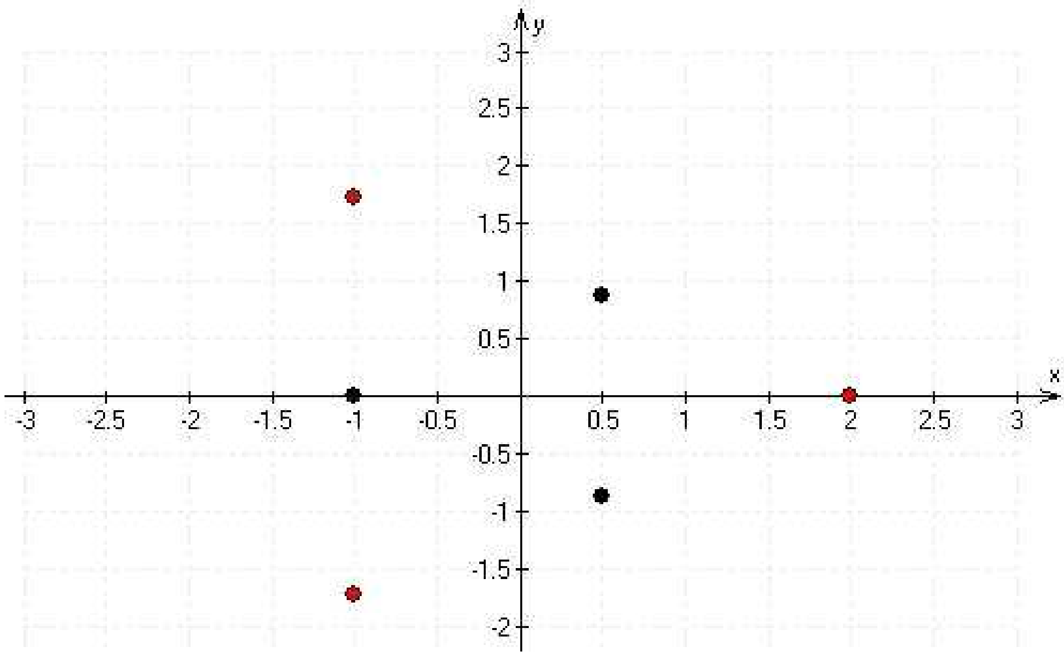
Запишем w в тригонометрической форме: $w = 8(\cos 0 + i\sin 0)$.
Тогда корни этого уравнения:

$$z_4 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{0}{3} + i\sin\frac{0}{3}\right) = 2(\cos 0 + i\sin 0) = 2,$$

$$z_5 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx -1 + 1,732i,$$

$$z_6 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx -1 - 1,732i.$$

Строим корни на комплексной плоскости (первая группа – черные точки, вторая группа – красные точки):


y
x
3
2.5
2
1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-2
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3