

Пример вычисления работы силы через криволинейные интегралы

ЗАДАНИЕ.

Вычислить работу силы $\vec{F}(z, -x, y)$ вдоль дуги винтовой линии

$$z = 2 \cos t, y = 3 \sin t, z = 4t, 0 \leq t \leq 2\pi$$

РЕШЕНИЕ.

Работа силы равна $A = \int_L z dx - x dy + y dz$, тогда получаем

$$A = \int_0^{2\pi} 4t d(2 \cos t) - 2 \cos t d(3 \sin t) + 3 \sin t d(4t) = -8 \int_0^{2\pi} t \sin t dt - 6 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt + 12 \int_0^{2\pi} \sin t dt = \dots$$

$$\int t \sin t dt = \left| \begin{array}{l} u = t \quad du = dt \\ dv = \sin t dt \quad v = -\cos t \end{array} \right| = -t \cos t + \int \cos t dt = -t \cos t + \sin t$$

$$\int \cos^2 t dt = \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t$$

$$\dots = -8[-t \cos t + \sin t]_0^{2\pi} - 6 \left[\frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{2\pi} + 12[-\cos t]_0^{2\pi} = 10\pi$$